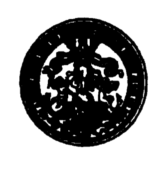
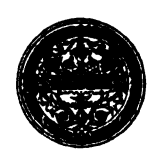

VE
RI
TAS

Dr. A. Kleyer's



Mathematisch-



technisch-naturwissenschaftliche Encyklopädie.

Lehrbuch

der

arithmetischen und geometrischen Progressionen

der

zusammengesetzten, harmonischen, Ketten- und Teilbruchreihen.

Dr. A. Kleyer's

Mathem.-techn.-naturwissenschaftliche Encyklopädie

enthält die **sämtlichen Definitionen, Lehrsätze, Formeln, Regeln etc.,** sowie die **denkbar mannigfaltigsten gelösten** und analogen **ungelösten Beispiele und praktischen Aufgaben,** welche in den sämtlichen Zweigen der

Rechenkunst, der niederen, höheren und angewandten Mathematik,

nämlich in den kaufmännischen und bürgerlichen Rechnungsarten, in der Algebra, Planimetrie, Stereometrie, synthetischen Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, Differential- und Integralrechnung etc., in der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, math. Geographie Astronomie, in dem Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- und Hochbau, sowie in den Konstruktionslehren, als: darstellende Geometrie, Polar- und Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc.

vorkommen und ist, infolge der eigentümlichen und praktischen Anordnung dieser Disciplinen, infolge der zahlreichen, jedem einzelnen Lehrsatz und Abschnitt beigegebenen

mannigfaltigen vollständig gelösten und analogen ungelösten praktischen Aufgaben,

sowie infolge der vielen sauberen **in den Text gedruckten Holzschnitte** und beigefügten **lithographischen Tafeln** von zahlreichen fachmännischen Seiten aus allen Teilen Europas und Amerikas als

das praktischste Lehrbuch für Schüler aller Schulen (indem jedes Hauptkapitel als ein für sich bestehendes Ganze abgeschlossen ist und allein bezogen werden kann), als

das beste Handbuch für Lehrer und Examinatoren (indem Definitionen etc. meist in Fragen und Antworten gegeben sind), als

das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium für jeden einzelnen Teil der erwähnten Wissenschaften, und als

ein vortreffliches Nachschlagebuch für Fachleute, Militärs, Ingenieure, Architekten Techniker jeder Art

anerkannt worden.

Stuttgart, im April 1884.

Die Verlagshandlung.

Erschienen sind:

1). **Lehrbuch der Logarithmen**
2). **Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln**
3). **Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln**
4). **Lehrbuch der Körperberechnungen,** 1. Buch

sämtlich besonders bearbeitet für den **Schulunterricht** und das **Selbststudium** von Dr. **A. Kleyer.**

Als neues Lieferungswerk erscheint soeben:

Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen in Theorie und Praxis

für den **Schulunterricht** und zum **Selbststudium** des Praktikers, sowie jedes Gebildeten, bearbeitet von Dr. **A. Kleyer.**

Lehrbuch

der

arithmetischen und geometrischen Progressionen

der

zusammengesetzten, harmonischen, Ketten- und Teilbruchreihen.

Nebst einer

Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten Aufgaben

erläutert durch

13 in den Text gedruckten Figuren

zum

Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum rationellen Selbststudium

bearbeitet von

Dr. A. Kleyer

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hess. Geometer I. Klasse in Frankfurt a. M.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1884.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Eines der interessantesten, lehrreichsten, dabei wichtigsten Kapitel der niederen Mathematik bilden die in diesem Buche vorgeführten Lehren der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Interessant und lehrreich ist deshalb das Studium des vorliegenden Buches, indem die arithmetischen und geometrischen Progressionen die verschiedensten Anwendungen in allen Gebieten finden, wie aus den in diesem Buche enthaltenen gelösten Aufgaben ersichtlich ist. Wichtig ist ferner das Studium dieses Buches, weil, abgesehen von den erwähnten vielfachen Anwendungen, welche die arithmetischen und geometrischen Reihen haben, die darin enthaltenen Theorien eine Brücke zum Studium der höheren Analysis, der höheren Reihen bilden.

Der Wichtigkeit der arithmetischen und geometrischen Progressionen entsprechend, habe ich dieses Kapitel im vorliegendem Buch, ausführlich behandelt. Definitionen, Entwickelungen von Formeln etc. gab ich, wie bei meinen übrigen Lehrbüchern in der Beantwortung von Fragen; die verschiedensten Anwendungen zeigte ich in der Lösung vieler praktischer Aufgaben.

Bei der selbstständigen Lösung der in diesem Buch enthaltenen Aufgaben wird der Studierende recht bald den grossen Unterschied erkennen, der zwischen dem Verstehenlernen von Theorien und der praktischen Verwertung derselben, bezw. dem Lösenlernen von Aufgaben besteht, und finden, dass letzteres nur durch eine grosse Uebung und eine systematische Bearbeitung gestellter Aufgaben erreicht werden kann, denn jede Aufgabe enthält etwas Neues und ist der Ansatz einer jeden Aufgabe stets ein eigenes Geistesprodukt. Deshalb möchte ich auch an dieser Stelle wiederholen: **dem Studierenden können niemals genug gelöste Aufgaben vorgeführt werden.**

In einem diesem Buche beigefügten Anhang habe ich in der Beantwortung von Fragen die Theorien der harmonischen Reihen, der Kettenreihen und der Teilbruchreihen von Heis angeführt und durch einige Beispiele erläutert. Die meisten Studierenden können das Studium dieses Anhangs ganz übergehen, vielen andern wird es genügen, wenigstens den Sinn der in diesem Anhang erwähnten Reihen verstehen zu lernen.

Bei der Bearbeitung dieses Buches war mir der leitende Gedanke: ein Buch für das **Selbststudium** und den **Schulunterricht** zu schaffen, welches zugleich aber auch dem Fachmanne ein Handbuch ist, in welchem er nicht vergebens herumzublättern hat. — Möge ich diesen Zweck erreicht haben. —

Etwaige Druckfehler, Berichtigungen, besondere Wünsche, bitte ich direkt an mich gelangen zu lassen.

Frankfurt a. M., im April 1884.

Dr. A. Kleyer.

Inhaltsverzeichnis.

Neuntes Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Inhalt: **Algebra.**
Die Reihen. 1. Teil.
Die niederen arithmetischen Reihen (arithm. Progressionen). Seite 1—16.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstgebrauch —
mit
Angabe der benutzten **Sätze, Formeln, Regeln,**
erläutert durch
viele Zinkographien, Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.

Die Reihen. 1. Teil. Seite 1—16.

Die niederen arithmetischen Reihen (arithmet. Progressionen).

Inhalt:

Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: arithmetischen Reihen, — Entwicklung der Formeln, — Aufstellung der 20 verschiedenen Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Stuttgart 1881.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das auf der Rückseite abgedruckte Inhalts-Verzeichniss der nächsterscheinenden Hefte wird gefälliger

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem bis jetzt **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von **25** ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesammtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** und **Angabe** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** etc., so dass die Lösung Jedermann, der nur Weniges aus der Schule gebracht hat, verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesammtheit ergänzen.

Jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der selbstständigen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen.

Die **ersten** Hefte des Werkes behandeln zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Präparanden-Anstalten aller Arten, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbl. Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten für das Einjährige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** dieser Fächer, werden durch diese Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert, ihnen die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt und somit an selbstständiges denken und arbeiten gewöhnt; ihnen zugleich der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen

Algebra.

Die Reihen.

(1. Teil.)

Die niederen arithmetischen Reihen
(arithmetische Progressionen).

I.

Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen.

Frage 1. Was ist in der Mathematik unter **Reihe** oder **Progression** zu verstehen?

Beispiel 1.

1, 3, 5, 7, 9 . . . .

ist eine Reihe, bezw. eine Folge von Zahlen, welche so gebildet sind, dass jedes Glied um 2 grösser ist als das vorhergehende.

Antwort. In der Mathematik versteht man unter **Reihe** oder **Progression** eine Aufeinanderfolge von Zahlen oder gleichartigen Grössen (Glieder, Terme, termini der Reihe), welche nach **irgend** einem arithmetischen Gesetze gebildet sind (siehe Beisp. 1).

Frage 2. Wodurch ist das Wesen einer Reihe ausgedrückt und wonach werden die Reihen unterschieden?

Beispiel 2.

In der Reihe:

1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . . . .

besteht die Bildung der einzelnen Glieder darin, dass jedes Glied um 2 grösser ist als das vorhergehende.

Beispiel 3.

In der Reihe:

2, 4, 8, 16, 32 . . . . . .

besteht die Bildung der einzelnen Glieder darin, dass jedes Glied doppelt so gross ist als das vorhergehende.

Antwort. Das Wesen einer Reihe ist durch das **Bildungsgesetz** ausgedrückt, nach welchem die einzelnen Glieder der Reihe gebildet sind. — Nach dem Bildungsgesetze der einzelnen Glieder werden auch die Reihen, dem Namen nach, unterschieden; so gehört die Reihe in Beispiel 2 zu den **arithmetischen**, die Reihe in Beisp. 3 zu den **geometrischen** Reihen.

Frage 3. Wie werden die **einzelnen** Glieder einer Reihe in Bezug auf ihre Stellung unterschieden und bezeichnet?

Beispiel 4.

Soll bezeichnet werden, dass in der Reihe:

$a, b, c, d, e, f \ldots\ldots$

d die 4. Stelle einnimmt, d. h. dass d das 4. Glied der Reihe ist, so wird dies bezeichnet, durch: d_4. Der Stellenzeiger, Zeiger oder Index ist in diesem Falle 4.

Antwort. Die **einzelnen** Glieder einer Reihe unterscheidet man je nach ihrer Stellenzahl und zwar von links nach rechts. Die Bezeichnung der Stelle eines Gliedes einer Reihe geschieht durch den sogenannten **Stellenzeiger, Zeiger,** auch **Index** genannt; derselbe wird rechts dem betr. Gliede beigeschrieben (siehe Beisp. 4).

Frage 4. Welche besondere Benennungen und Bezeichnungen kommen in einer Reihe vor?

Erkl. 1. Wie später ersichtlich, ist in dem n^{ten} oder allgemeinen Gliede das Bildungsgesetz der Reihe enthalten und lassen sich aus demselben die einzelnen Glieder der Reihe ableiten.

Antwort. In einer Reihe nennt man das 1. Glied, **das Anfangsglied** und bezeichnet dasselbe meistens durch a.

Dann nennt man das Glied, welches den allgemeinen Stellenzeiger n hat, also in der Reihe, die unbestimmte n^{te} Stelle einnimmt, das n^{te} oder **allgemeine Glied** der Reihe (Erkl. 1).

Ferner nennt man die Summe aller Glieder einer Reihe, das **summierende** oder das **summatorische Glied** der Reihe und bezeichnet dasselbe mit s.

Schliesslich nennt man das letzte Glied einer Reihe, das **Endglied** und bezeichnet dasselbe durch t *(terminus)*.

Frage 5. Wann heisst eine Reihe: steigend, fallend, endlich und unendlich?

Beispiel 5.

Eine steigende Reihe, ist:

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Beispiel 6.

Eine fallende Reihe, ist:

11, 9, 7, 5, 3, 1.

Antwort. Eine Reihe nennt man:

a) **steigend** (zunehmend), wenn jedes Glied grösser ist wie das vorhergehende, siehe Beisp. 5;

b) **fallend** (abnehmend), wenn jedes Glied kleiner ist wie das vorhergehende, siehe Beisp. 6;

c) **endlich,** wenn die Anzahl der Glieder eine beschränkte ist, und

d) **unendlich**, wenn die Anzahl der Glieder eine unbeschränkte ist.

Anmerkung 1. Aus Beisp. 5 und 6 ersieht man, dass ein und dieselbe Reihe steigend oder fallend ist, je nachdem dieselbe vor- oder rückwärts gelesen wird.

II.

Erläuternde Fragen mit Antworten, über die: arithmetischen Reihen — Entwicklung der Formeln — Aufstellung der 20 verschiedenen Fälle.

Frage 6. Was ist eine **arithmetische** Reihe oder eine **arithmetische** Progression?

Anmerkung 2. In der Mathematik gibt es verschiedene Arten arithmetischer Reihen, nämlich: **niedere** und **höhere**. — Die in diesem Teile behandelten arithmetischen Reihen sind die niederen.

Erkl. 2. Eine arithmetische **Proportion** ist die Verbindung zweier gleichen Differenzen durch das Gleichheitszeichen, z. B.:

$$8 - 5 = 13 - 10.$$

Sind die mittleren Glieder in einer solchen Proportion gleich, so heisst dieselbe eine **stetige** arithmetische Proportion, z B.:

$$8 - 5 = 5 - 2$$

(siehe: Algebra, die Proportionen).

Beispiel 7.

Die Reihe: 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . . .

ist eine arithmetische; dieselbe genügt der Definition unter 1) und 2), genügt aber auch der Definition unter 3); denn werden irgend drei aufeinanderfolgende Glieder dieser Reihe, z. B. das 3., 4. und 5. gewählt, so bilden dieselben nach Erkl. 2 die stetige arithmetische **Proportion**:

$$5 - 7 = 7 - 9$$
$$(-2 = -2)$$

Antwort. Die Definition einer **arithmetischen** Reihe oder einer **arithmetischen** Progression kann man auf verschiedene Arten, wie folgt, geben:

1) Jede reihenartige Anordnung fortschreitender Zahlengrössen, bei welchen das Gesetz stattfindet, dass jedes folgende Glied der Reihe dadurch entsteht, dass zu dem vorhergehenden ein und dieselbe Grösse addiert wird, nennt man eine **arithmetische** Reihe (Progression).

2) Eine **arithmetische** Reihe ist eine solche Reihe von Zahlen oder Grössen, in welcher die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse ist.

3) Eine Reihe von der Art, dass je drei aufeinanderfolgenden Glieder eine **stetige arithmetische Proportion** (Erkl. 2) bilden, ist eine **arithmetische** Reihe (siehe Beisp. 7).

Die Definition unter 3) ist in gewissen Fällen von besonderem Werte. Man vergleiche die analogen Definitionen der geometrischen und der harmonischen Reihen.

Frage 7. Wie wird der **konstante** Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Progression benannt und bezeichnet?

Antwort. Der **konstante** Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Reihe wird **Differenz**, auch Unterschied oder Name der Reihe genannt und wird durch den Buchstaben d bezeichnet.

Frage 8. Durch welche Elemente ist zunächst eine arithmetische Reihe bestimmt?

Beispiel 8.

Ist $a = 4$ und $d = 3$, so ist nach der Definition: das 2. Glied $= 4 + 3 = 7$
„ 3. „ $= 7 + 3 = 10$
„ 4. „ $= 10 + 3 = 13$ u. s. f.

Beispiel 9.

Ist das 3. Glied einer arithm. Reihe $= 2$, die Differenz $d = 4$, so ist
das 2. Glied $= 2 - 4 = -2$
„ 1. „ $= -2 - 4 = -6$
analog „ 4. „ $= 2 + 4 = 6$
„ 5. „ $= 6 + 4 = 10$ u. s. f.

Antwort. Eine arithmetische Reihe ist zunächst durch das Anfangsglied a (oder auch durch irgend ein Glied der Reihe) und durch die Differenz d bestimmt, siehe Beispiele 8 und 9,

---

Frage 9. Wie heisst eine arithmetische Reihe in ihrer **allgemeinen Form** und wie ergibt sich aus der allgemeinen Form das sogenannte **allgemeine**, bezw. das **letzte Glied** der Reihe?

Beispiel 10.

Das vierte Glied $(a + 3d)$ der nebenstehenden Reihe, besteht aus a plus der 3fachen Differenz d (der Stellenzeiger dieses Gliedes ist 4, weil es das 4. Glied der Reihe ist, derselbe um eine Einheit vermindert, gibt 3).

Antwort. Bezeichnet man mit a das Anfangsglied, mit d die Differenz einer arithmetischen Reihe, so heisst dieselbe in ihrer **allgemeinen Form**:

1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.	4. Gl.	5. Glied
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$ ....

Aus dieser allgemeinen Form ersieht man, dass jedes Glied aus a plus dem sovielfachen Produkte von d besteht als der um **eine Einheit verminderte** Stellenzeiger angibt (siehe Beisp. 10).

Das n^{te} oder das **allgemeine** Glied, heisst hiernach: $a + (n-1)\,d$.

Ist die Anzahl der Glieder der Reihe $= n$, so hat man für das **letzte** Glied t:

Formel 1. .... $t = a + (n-1) \,.\, d$ (Anm. 3).

Anmerkung 3. Ist die Reihe eine abnehmende, so ist d, mithin auch das Produkt in welchem d vorkommt, **negativ**, und die Formel I. geht in diesem Falle über, in:

$$t = a - (n-1) \,.\, d \text{ (vgl. Frage 10).}$$

Aus dem **allgemeinen**, bezw. dem **letzten** Gliede t, kann man **jedes** Glied berechnen, so ist, wenn für n die Zahl 5 gesetzt wird, das 5. Glied $=$

$$a + (5-1)\,d = a + 4d.$$

Frage 10. Wann ist eine arithmetische Progression **steigend** (zunehmend), wann **fallend** (abnehmend)?

Beispiel 11.

Eine steigende (zunehmende) arithm. Reihe, ist: 3, 5, 7, 9, 11
hierin ist $d = +2$.

Beispiel 12.

Eine fallende (abnehmende) Reihe, ist:
17, 14, 11, 8, 5 . . .
hierin ist $d = -3$.

Antwort. Eine arithmetische Progression ist **steigend** (zunehmend), wenn die Differenz d zwischen einem und dem nächstvorhergehenden Gliede **positiv** ist, siehe Beisp. 11; eine Reihe ist **fallend** (abnehmend), wenn diese Differenz **negativ** ist, siehe Beisp. 12.

Frage 11. Wie gross ist die **Summe** s sämmtlicher Glieder einer endlichen arithmetischen Reihe, wenn dieselbe in ihrer allgemeinen Form gegeben ist, oder: wie heisst das **summatorische** oder das **summierende Glied** dieser Reihe?

Die Aussage ist zu beweisen.

Antwort. Die **Summe** s der Glieder einer arithmetischen Reihe, welche aus n Gliedern besteht, — auch das **summatorische** oder **summierende** Glied der Reihe genannt — ist gegeben durch die Formel:

Formel 2. . . . . . $s = \frac{n}{2}(a+t)$.

Beweis vorstehender Formel:

Die gegebene arithmetische Reihe in ihrer allgemeinen Form, ist:

Erkl. 3. Ist das letzte oder n^{te} Glied $= t$, so ist das vorletzte $= (t-d)$, das vorvorletzte $= (t-2d)$ u. s. f.

1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.		vorvorl. Gl.	vorl. Gl.	letztes Gl.
a,	$(a+d)$,	$(a+2d)$	. . . . .	$(t-2d)$,	$(t-d)$,	t (Erkl. 3).

Zur Bildung des **summatorischen** Gliedes s muss man die Glieder dieser Reihe addieren, wonach man erhält:

$$1) \ldots . s = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots . (t-2d)+(t-d)+t$$

oder: $$2) \ldots . s = t+(t-d)+(t-2d)+\ldots . (a+2d)+(a+d)+a \text{ (Erkl. 4)}$$

Erkl. 4. Gleichung 2) ist dieselbe wie Gleichung 1), nur sind die Glieder rechts in umgekehrter Reihenfolge geschrieben.

Addiert man nun diese beiden Gleichungen, so fallen alle diejenigen Glieder weg, welche d enthalten, und es restiert nach der Addition:

$$2s = (a+t)+(a+t)+(a+t)+\ldots . (a+t)+(a+t)+(a+t)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt der Summand $(a+t)$ so oft vor, als die Reihe Glieder hatte, nämlich n mal, mithin ist auch:

$$2s = n\,.\,(a+t) \text{ oder:}$$

$$s = \frac{n}{2}(a+t)$$

die zu beweisende Formel.

Frage 12. Welche Grössen kommen in einer arithmetischen Reihe in Betracht und durch welche Gleichungen ist deren Zusammenhang ausgedrückt?

Antwort. In einer arithmetischen Reihe kommen **fünf** Grössen in Betracht, nämlich:

a das Anfangsglied,
d die Differenz,
n „ Anzahl (*numerus*) d. Gl.,
t das letzte Glied (*terminus*) und
s die Summe oder das summatorische Glied der Reihe.

Der **Zusammenhang** dieser 5 Grössen ist durch die **Formeln 1 u. 2**, nämlich:

$$t = a + (n - 1)\,d \quad \text{und}$$

$$s = \frac{n}{2}\,(a + t) \quad \text{ausgedrückt.}$$

Diese Formeln bilden daher die **Fundamentalgleichungen** der arithm. Reihen.

Frage 13. Wieviel und welche Fälle können in Bezug auf die gegebenen und die gesuchten Bestimmungsstücke einer arithmetischen Progression stattfinden?

Antwort. In Bezug auf die **gegebenen** und die **gesuchten** Bestimmungsstücke einer arithmetischen Progression können **zwanzig Fälle** stattfinden, und zwar:

1) d, n, t	**gegeben**	und a	**gesucht,**
2) d, n, s	"	" "	"
3) d, t, s	"	" "	"
4) n, t, s	"	" "	"
5) a, n, t	**gegeben**	und d	**gesucht,**
6) a, n, s	"	" "	"
7) a, t, s	"	" "	"
8) n, t, s	"	" "	"
9) a, d, n	**gegeben**	und s	**gesucht,**
10) a, d, t	"	" "	"
11) a, n, t	"	" "	"
12) d, n, t	"	" "	"
13) a, d, n	**gegeben**	und t	**gesucht,**
14) a, d, s	"	" "	"
15) a, n, s	"	" "	"
16) d, n, s	"	" "	"
17) a, d, t	**gegeben**	und n	**gesucht,**
18) a, d, s	"	" "	"
19) a, t, s	"	" "	"
20) d, t, s	"	" "	"

Im nachstehenden sind diese 20 verschiedenen Fälle in Form von allgemeinen Aufgaben behandelt.

III.

Allgemeine Aufgaben über die 20 verschiedenen Fälle.

Aufgabe 1. Wie gross ist das **Anfangsglied** a einer arithmetischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) d, n, t
b) d, n, s
c) d, t, s
d) n, t, s?

Formeln: 1) $t = a + (n - 1)\,d$

2) $s = \frac{n}{2}\,(a + t)$

Auflösung.

a) Gegeben: $d, n\ t.$

Zur Auffindung der Grösse a muss eine Gleichung aufgestellt werden, in welcher a und die gegebenen Grössen d, n, t vorkommen; eine solche liefert bei näherer Betrachtung obige Formel 1:

$$t = a + (n - 1)\,d$$

dieselbe nach der gesuchten Grösse a aufgelöst, gibt:

Gleichung 1 $\quad \ldots\ldots\ a = t - (n - 1)\,d$

---

b) Gegeben: d, n, s.

Zur Aufstellung einer Gleichung, welche nur die Grössen d, n, s und a enthält, substituiere man den Wert für t aus Formel 1 in Formel 2; alsdann ist:

$$s = \frac{n}{2}\Big(a + a + (n - 1)\,d\Big)$$

Diese Gleichung reduziert und nach a aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)\,d)$$

$$\frac{2s}{n} = 2a + (n - 1)\,d$$

$$2a = \frac{2s}{n} - (n - 1)\,d$$

und schliesslich:

Gleichung 2 $\quad \ldots\ldots\ a = \frac{s}{n} - (n - 1)\,\frac{d}{2}$

---

c) Gegeben: d, t, s.

Zur Aufstellung einer Gleichung, welche nur die Grössen d, t, s und a enthält, substituiere man die Grösse n aus Formel 1 in 2, und man erhält (Erkl. 5):

$$s = \frac{t - a + d}{2d}\,(a + t)$$

Löst man diese Gleichung nach der gesuchten Grösse a auf, so wird:

$$2sd = (t - a + d)\,(a + t)$$

$$2sd = at - a^2 + ad + t^2 - at + dt$$

Erkl. 5. Formel 1 nach n aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$t = a + (n - 1)\,d$$
$$t - a = nd - d$$
$$t - a + d = nd$$
$$\frac{t - a + d}{d} = n.$$

Erkl. 6. Man denke sich: beiderseits $\left(\frac{d}{2}\right)^2$ addiert; die linke Seite heisst hiernach: $a^2 - ad + \left(\frac{d}{2}\right)^2$ und dies ist $= \left(a - \frac{d}{2}\right)^2$ alsdann beiderseits die 2. Wurzel gezogen und berücksichtigt, dass die 2. Wurzel die Vorzeichen $+$ und $-$ haben kann (siehe Algebra, die unrein quadratischen Gleichungen).

Erkl. 7. Die drei Glieder $\left(\frac{d}{2}\right)^2$, dt und t^2 bilden zusammen ein Binom im Quadrat, nämlich $\left(\frac{d}{2}+t\right)^2$.

$$a^2 - ad = dt - 2sd + t^2$$

$$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{dt - 2sd + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + t^2} \quad \text{(Erkl. 6)}$$

Gleichung 3 . . $$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}+t\right)^2 - 2ds} \quad \text{(Erkl. 7).}$$

---

d) Gegeben: n, t, s.

Zur Aufstellung einer Gleichung, welche nur die Grössen n, t, s und a enthält, beachte man, dass Formel 2 dieser Bedingung direkt genügt; dieselbe nach a aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = \frac{n}{2}(a+t)$$

$$\frac{2s}{n} = a + t \quad \text{oder:}$$

Gleichung 4 . . . . $$a = \frac{2s}{n} - t.$$

Aufgabe 2. Wie gross ist die **Differenz** d einer arithmetischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) a, n, t
b) a, n, s
c) a, t, s
d) n, t, s?

Formeln: 1) $t = a + (n-1)d$

„ 2) $s = \frac{n}{2}(a+t)$.

Auflösung.

a) Gegeben: a, n, t.

Die Formel 1 enthält die 4 in Frage kommenden Stücke a, n, t und d; dieselbe nach d aufgelöst, gibt:

$$t - a = (n-1)d \quad \text{oder:}$$

Gleichung 5 . . . . $$d = \frac{t-a}{n-1}$$

---

b) Gegeben: a, n, s.

Substituiert man den Wert für t aus Formel 1 in 2, so entsteht eine Gleichung, welche nur die in Betracht kommenden Stücke enthält, nämlich:

$$s = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d)$$

Löst man diese Gleichung nach d auf, so erhält man der Reihe nach:

$$\frac{2s}{n} = 2a + (n-1)d$$

$$\frac{2s}{n} - 2a = (n-1)d$$

$$(n-1)d = \frac{2s - 2an}{n} \quad \text{oder:}$$

Gleichung 6 .... $$d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}$$

c) Gegeben: a, t, s.

In Aufgabe 1 wurde unter c) bereits eine Gleichung zwischen den in Frage kommenden Stücken aufgestellt; dieselbe hiess:

$$s = \frac{t-a+d}{2d}(a+t)$$

nach d aufgelöst, erhält man der Reihe nach:

$$2ds = (t-a+d)(a+t)$$

$$2ds = at - a^2 + ad + t^2 - at + dt$$

$$2ds - ad - dt = t^2 - a^2$$

$$d(2s-a-t) = t^2 - a^2$$

Gleichung 7 ... $$\begin{cases} d = \dfrac{t^2-a^2}{2s-a-t} \quad \text{oder auch:} \\ d = \dfrac{(t+a)(t-a)}{2s-a-t} \quad \text{(Erkl. 8).} \end{cases}$$

Erkl. 8. Für die Differenz zweier Quadrate kann man das Produkt, bestehend aus der Summe der Basen mal der Differenz der Basen setzen (bequem bei der numerischen Ausrechnung).

d) Gegeben: n, t, s.

Zur Aufstellung einer Gleichung, welche nur die 4 Grössen n, t, s und d enthält, substituiere man den Wert für a (Erkl. 9) aus Formel 1, in 2, wodurch man erhält:

$$s = \frac{n}{2}(t-(n-1)d+t)$$

Diese Gleichung nach d aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = \frac{n}{2}(2t-(n-1)d)$$

$$\frac{2s}{n} = 2t-(n-1)d$$

Erkl. 9. Die Formel 1:
$$t = a + (n-1)d$$
nach a aufgelöst, ist:
$$a = t - (n-1)d.$$

$$(n-1)\,d = 2t - \frac{2s}{n}$$

$$(n-1)\,d = \frac{2tn - 2s}{n}$$

Gleichung 8 . . . . $d = \frac{2\,(tn - s)}{n\,(n-1)}$

Aufgabe 3. Wie gross ist die **Summe** s aller Glieder oder das **summatorische** Glied einer endlichen arithmetischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) $a,\ d,\ n$
b) $a,\ d,\ t$
c) $a,\ n,\ t$
d) $d,\ n,\ t$?

Formeln: 1) $t = a + (n-1)\,d$

„ 2) $s = \frac{n}{2}\,(a + t)$

Auflösung.

a) Gegeben: $a,\ d,\ n.$

Durch Substituierung der Grösse t aus Formel 1 in 2, erhält man:

Gleichung 9 . . . . $s = \frac{n}{2}\,(2a + (n-1)\,d)$

---

b) Gegeben: $a,\ d,\ t.$

In Aufgabe 1 wurde unter c) bereits eine Gleichung zwischen a, d, t und s aufgestellt, nämlich:

Gleichung 10 . . . . $s = \frac{t - a + d}{2d}\,(a + t)$

dieselbe liefert den gesuchten Wert für s.

---

c) Gegeben: $a,\ n,\ t.$

Formel 2 liefert direkt das gewünschte Resultat:

Gleichung 11 . . . . $s = \frac{n}{2}\,(a + t).$

---

d) Gegeben: $d,\ n,\ t.$

In Aufgabe 2 wurde unter d) bereits eine Gleichung zwischen s, d, n und t aufgestellt, nämlich:

$$s = \frac{n}{2}\,(t - (n-1)\,d + t), \text{ oder:}$$

Gleichung 12 . . . . $s = \frac{n}{2}\,(2t - (n-1)\,d).$

Aufgabe 4. Wie gross ist das **Endglied** t einer arithmetischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) a, d, n
b) a, d, s
c) a, n, s
d) d, n, s?

Formeln: 1) $t = a + (n-1)d$

„ 2) $s = \frac{n}{2}(a+t)$

Auflösung.

a) Gegeben: a, d, n.

Formel 1 liefert direkt die gesuchte Grösse:

Gleichung 13 . . . . $t = a + (n-1)d$.

---

b) Gegeben: a, d, s.

Erkl. 10. Aus Formel 2 ergibt sich für n:

$$n = \frac{2s}{a+t}$$

Erkl. 11. Da die Unbekannte t in dem Nenner $(a+t)$ vorkommt, so musste die ganze Gleichung mit diesem Nenner $(a+t)$ multipliziert werden.

Erkl. 12. Die drei Glieder

$$a^2 - ad + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

bilden zusammen ein Binom im Quadrat, nämlich: $\left(a - \frac{d}{2}\right)^2$.

Zur Herstellung einer Gleichung, welche nur die Grössen a, d, s und t enthält, substituiere man den Wert für n (Erkl. 10) aus Formel 2 in 1, wodurch man erhält:

$$t = a + \left(\frac{2s}{a+t} - 1\right)d$$

Diese Gleichung nach der Grösse t aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$t = a + \frac{2sd}{a+t} - d$$

$$at + t^2 = a^2 + at + 2sd - ad - dt \quad \text{(Erkl. 11)}$$

$$t^2 + dt = a^2 + 2ds - ad$$

$$t = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{a^2 + 2ds - ad + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad \text{(analog Erkl. 6)}$$

oder:

Gleichung 14 . . . . $t = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}$ (Erkl. 12)

---

c) Gegeben: a, n, s.

Formel 2 liefert direkt die aufzustellende Bestimmungsgleichung, welche nach t aufgelöst, gibt:

$$s = \frac{n}{2}(a+t)$$

$$\frac{2s}{n} = a + t \quad \text{oder:}$$

Gleichung 15 . . . . $t = \frac{2s}{n} - a$.

---

d) Gegeben: d, n, s.

In Aufgabe 2 wurde unter d) bereits eine Gleichung zwischen den Grössen d, n, s und t aufgestellt, nämlich:

$$s = \frac{n}{2}(2t - (n-1)d)$$

Diese Gleichung nach der Grösse t aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{2s}{n} = 2t - (n-1)d$$

$$2t = \frac{2s}{n} + (n-1)d \text{ oder:}$$

Gleichung 16 . . . . . . $t = \frac{s}{n} + (n-1)\frac{d}{2}$

Aufgabe 5. Wie gross ist die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) a, d, t
b) a, d, s
c) a, t, s
d) d, t, s?

Formeln: 1) $t = a + (n-1)d$
" 2) $s = \frac{n}{2}(a+t)$

Auflösung.

a) Gegeben: a, d, t.

Aus Formel 1 ergibt sich der Reihe nach:

$$t - a = dn - d$$

$$dn = t - a + d$$

$$n = \frac{t-a+d}{d} \text{ oder:}$$

Gleichung 17 . . . . $n = \frac{t-a}{d} + 1.$

---

b) Gegeben: a, d, s.

Eine Gleichung zwischen den Grössen a, d, s und n wurde bereits in Aufgabe 3 unter a) aufgestellt, nämlich:

$$s = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

Dieselbe nach n aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2s = 2an + (n-1)dn$$

$$2s = 2an + dn^2 - dn$$

$$dn^2 + 2an - dn = 2s$$

$$dn^2 + (2a - d)n = 2s$$

Erkl. 13. Ehe zur Auflösung einer unrein quadratischen Gleichung geschritten wird, muss der Koeffizient (d), welchen x^2 (n^2) hat, durch Division entfernt werden; (siehe Algebra, die unrein quadr. Gleichungen).

Erkl. 14. Um auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat zu erhalten, wurde beiderseits $\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2$ zuaddiert (s. Algebra, die unr. quadr. Gl.)

$$n^2 + \frac{2a-d}{d} \cdot n = \frac{2s}{d} \quad \text{(Erkl. 13)}$$

Gleichung 18 . . . . $$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$$ (Erkl. 14)

---

c) Gegeben: a, t, s.

Die Formel 2 liefert direkt eine Gleichung zwischen den in Frage kommenden Stücken, dieselbe nach n aufgelöst, gibt:

Gleichung 19 . . . . $$n = \frac{2s}{a+t}$$

---

d) Gegeben: d, t, s.

Die Aufgabe 3 liefert unter d) eine Gleichung zwischen den Stücken d, t, s und n, nämlich:

$$s = \frac{n}{2}(2t - (n-1)d)$$

Dieselbe nach n aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2s = 2nt - (n-1)nd$$

$$2s = 2nt - n^2d + nd$$

$$n^2d - 2nt - nd = -2s$$

$$n^2d - n(2t+d) = -2s$$

$$n^2 - n \cdot \frac{2t+d}{d} = -\frac{2s}{d} \quad \text{(analog Erkl. 13)}$$

Gleichung 20 . . . . $$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}$$ (analog Erkl. 14)

Anmerkung 4. Vorstehende 5 allgemeine Aufgaben liefern **20 Gleichungen, bezw. Formeln.** In jeder Aufgabe, welche eine arithmetische Reihe bedingt wird mindestens eine dieser Gleichungen, bezw. Formeln entwickelt werden müssen, deshalb sind die beiden Fundamentalgleichungen:

Formel I.: $t = a + (n-1)d$ (Gl. 13)

" II.: $s = \frac{n}{2}(a+t)$ (Gl. 11)

mit deren Hülfe dies — wie hier vorgeführt — geschehen kann, dem Gedächtnisse anzuvertrauen.

IV.

Praktische Aufgaben.

Aufgabe 6. Wie gross ist die Differenz d einer arithmetischen Reihe, wenn von derselben gegeben ist:

a	5
t	13
s	28?

Gleich. 7: $$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-a-t}$$

Auflösung.

Um eine Gleichung zwischen den in Frage kommenden Stücken a, t, s und d zu erhalten, verfahre man wie unter c) in Aufgabe 2, wodurch man obige Gleich. 7 erhält. Mit Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte, erhält man

$$d = \frac{(13+(-5))(13-(-5))}{2.28-(-5)-13} \text{ oder:}$$

$$d = \frac{(13-5)(13+5)}{56+5-13}$$

$$d = \frac{8.18}{48}$$

$$d = 3.$$

Aufgabe 7. Wie gross ist die Anzahl n der Glieder einer arithmetischen Reihe, wenn gegeben ist:

d	2
s	66
a	16?

Gleich. 18:

$$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$$

Auflösung.

Um eine Gleichung zwischen den in Frage kommenden Stücken a, d, s und n zu erhalten, verfahre man wie unter b) in Aufgabe 5, wodurch man obige Gleich. 18 erhält.

Mit Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte, erhält man:

$$n = -\frac{2.16-(-2)}{2.(-2)} \pm \sqrt{\frac{2.66}{-2} + \left(\frac{2.16-(-2)}{2(-2)}\right)^2}$$

oder:

$$n = -\frac{32+2}{-4} \pm \sqrt{-66 + \left(\frac{32+2}{-4}\right)^2} \text{ (Erkl. 15)}$$

$$n = \frac{-34}{-4} \pm \sqrt{-66 + \left(\frac{34}{-4}\right)^2}$$

$$n = \frac{34}{4} \pm \sqrt{-66 + \frac{34^2}{16}} \text{ (Erkl. 15)}$$

$$n = \frac{34}{4} \pm \sqrt{\frac{-1056+1156}{16}}$$

$$n = \frac{34}{4} \pm \sqrt{\frac{100}{16}}$$

$$n = \frac{34}{4} \pm \frac{10}{4} \text{: mithin ist:}$$

Erkl. 15. Eine positive Grösse (2.66) durch eine negative (−2) dividiert, gibt ein negatives Resultat. Eine negative Grösse durch eine negative dividiert, gibt ein positives Resultat.

$n_1 = 11$ und $n_2 = 6$.

Die Reihe hat somit entweder 11 Glieder und heisst:

16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, —2, —4

oder sie hat 6 Glieder und heisst:

16, 14, 12, 10, 8, 6.

Aufgabe 8. Wie gross ist die Summe der ersten 1000 Zahlen der sogenannten natürlichen Zahlenreihe?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$.

Auflösung.

Unter der natürlichen Zahlenreihe versteht man die aufeinanderfolgenden Zahlen von $+ 1$ bis in infinitum.

Nach der Aufgabe soll die Summe dieser Zahlen von 1 bis 1000 gesucht werden, nämlich:

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{u.s.f.} \ldots + 1000$$

Diese Zahlenreihe stellt, weil die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Zahlen **konstant**, nämlich = 2 ist, eine arithmetische Reihe dar. Von derselben kennt man:

das Anfangsglied	$a = 1$
die Differenz	$d = 1$
das Endglied	$t = 1000$
und die Anzahl der Gl.	$n = 1000$

Setzt man diese Werte in obige Formel ein, so erhält man:

$$s = \frac{1000}{2}(1 + 1000) \text{ oder:}$$

$$s = 500 . 1001 = 500500.$$

Aufgabe 9. Zwischen den Zahlen 7 und 13 sollen 8 Glieder so eingeschaltet (interpoliert) werden, dass eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heisst diese Reihe?

Gleich. 5: $d = \frac{t - a}{n - 1}$

Auflösung.

Von der gesuchten arithm. Reihe ist das Anfangsglied $a = 7$, das Endglied $t = 13$ und, weil 8 Glieder eingeschaltet werden sollen, auch die Anzahl der Glieder $n = 10$ gegeben.

Werden diese Werte in obige Gl. 5 (siehe Aufgabe 2 unter a) eingesetzt, so erhält man für die Differenz:

$$d = \frac{13 - 7}{10 - 1} \text{ oder:}$$

$$d = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Mit Hülfe dieser gefundenen Differenz kann man nun die einzelnen Glieder der Reihe bestimmen, dieselben sind:

$7, 7^2/_3, 8^1/_3, 9, 9^2/_3, 10^1/_3, 11, 11^2/_3, 12^1/_3, 13.$

Aufgabe 10. Von einer arithm. Reihe ist bekannt die Summe des 4. und 7. Gliedes = 100 und die Summe des 17. und 29. Gliedes = 800. Wie gross ist das Anfangsglied a und die Differenz d dieser Reihe?

Das allgemeine Glied, ist:

$$= a + (n - 1)\,d.$$

Auflösung.

In der Aufgabe sind 2 Gleichungen enthalten, nämlich die Summe des 4. und 7. Gliedes soll = 100 und die Summe des 17. und 29. = 800 sein.

Wird nun das gesuchte Anfangsglied a mit x, die gesuchte Differenz d mit y bezeichnet, so ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{das 4. Glied} & = (x + 3y) \\ \text{„ 7 „} & = (x + 6y) \\ \text{„ 17. „} & = (x + 16y) \\ \text{und „ 29. „} & = (x + 28y) \end{array}\right\} \text{siehe Antwort Frage 9.}$$

Mithin bestehen die Gleichungen:

1) $(x + 3y) + (x + 6y) = 100$

2) $(x + 16y) + (x + 28y) = 800$

Reduziert und ordnet man beide Gleichungen, so gehen dieselben über, in:

3) $2x + 9y = 100$

4) $2x + 44y = 800$

Subtrahiert man Gleich. 3 von Gleich. 4, so ist:

$35y = 700$ oder:

$y = 20$. Diesen Wert in Gleich. 3 substituiert, gibt:

$2x + 180 = 100$

$2x = -80$ oder:

$x = -40$. Das gesuchte Anfangsglied a ist somit $= -40$ u. die Differenz $d = 20$.

V.

Anhang ungelöster Aufgaben.

Aufgabe 1. Wie gross ist die Anzahl n der Glieder und das Endglied t einer arithmetischen Reihe, wenn $a = 3$, $d = \frac{1}{2}$ und $s = 78$ ist?

Aufgabe 2. Wie gross ist d und t, wenn gegeben ist: $a = \frac{3}{4}$, $n = 40$ und $s = 517\frac{1}{2}$?

Aufgabe 3. Wie gross ist a und t, wenn gegeben ist: $d = \frac{2}{7}$, $n = 32$ und $s = 160$?

Aufgabe 4. Wie gross ist s und n, wenn gegeben ist: $a = 1700$, $d = 5$ und $t = 1870$?

Aufgabe 5. Wie gross ist d und n, wenn gegeben ist: $t = -16$, $s = -30$ u. $a = 12$?

Aufgabe 6. Wie gross ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 75?

Aufgabe 7. Wie gross ist die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis 64?

Aufgabe 8. Das 7. Glied einer arithmetischen Reihe heisst 10, das 17. Glied heisst 50. Wie heisst das erste Glied und die Differenz der Reihe?

und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Dieses Werk, welches durch sein **fortlaufendes** Erscheinen **stets auf der Höhe der Zeit steht,** kann Jedermann empfohlen werden — jedes Heft hat einen **reellen Wert** und bildet ein abgeschlossenes Ganze. — Es wird mit den Jahren ein **mathematisch-naturwissenschaftliches Lexikon,** in welchem die **mannigfaltigsten, praktischsten Verwertungen — die Früchte der mathematischen Disciplinen** — von Stufe zu Stufe aufzufinden sind.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. — Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, März 1881. **Die Verlagshandlung.**

Inhalts-Verzeichnis.

Am Schlusse der nachstehend verzeichneten Hefte, ausgenommen Heft 10 und 14, ist je eine Anzahl ungelöster Aufgaben angeführt. Die Auflösungen derselben sollen — analog den entsprechenden, gelösten Aufgaben — gesucht werden, wodurch bezweckt wird, dass der Studierende sich zum selbstständigen Arbeiter heranbildet. Die Lösungen dieser Aufgaben werden später in besonderen Heften zur Ausgabe gelangen.
Der Inhalt jedes Heftes erleidet nur bei Raummangel eine kleine Abänderung, resp. Kürzung.

einer konstant. Grösse, eines Produktes, eines Bruches, einer Exponentialgrösse, einer logarithmischen Grösse, der trig. und cyklometr. Funktionen etc. — mit vielen gelösten und Anhängen von ungelösten Aufgaben.

Heft 7. Algebra: Die Proportionen. (1. Teil.)
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über Verhältnisse und Proportionen. — Die arithm. Proportionen (Fragen mit Antworten). — Die geometr. Proportionen — Lehrsätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die Summen u. Differenzensätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die laufenden Proportionen. — Gegebene Proport. in laufende zu verwandeln — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 8. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. (1. Teil.)
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Konstruktion planimetr. Aufgaben durch die algebraische Analysis. — Einfache algebr. Ausdrücke — Hülfssätze. — Konstruktion der einfachen algebr. Ausdrücke — Konstruktion der vierten, dritten u. mittleren Proportionalen. — Konstruktion zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 9. Algebra: Die Reihen. (1. Teil.) **Die niederen arithmet. Reihen (arithmetische Progressionen).**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: arithmet. Reihen, — Entwicklung der Formeln, Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Prakt. Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgab.

Heft 10. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs- (Taktions-) Problem. (1. Teil.)
Inhalt: Vorbemerkung. — Aufstellung der 10 mögl. Fälle. — Die 10 mögl. Fälle mit vielen sich daraus ergebenden besonderen Kreiskonstruktionsaufgaben.

Heft 11. Algebra: Die Reihen. (2. Teil.) **Die geometrischen Reihen.**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die geometrischen Reihen. — Entwicklung der Grundformeln. — Entwicklung der 20 möglichen Fälle mit Ausschluss der 4, welche auf höhere Gleichungen führen. — Aufgaben.

Heft 12. Stereometrie: Körperberechnungen. (2. Teil.) **Die Pyramide.**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Definition, Erzeugung, Bestandteile etc. der Pyramide im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen der geraden Pyramide. — Aufgaben.

Heft 13. Stereometrie: Körperberechnungen. (3. Teil.) **Der Pyramidenstumpf.**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Pyramidenstumpf im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Pyramidenstumpfes. — Aufgaben.

Heft 14. Planimetrie: Das Apollonische Berührungsproblem. (2. Teil.)
Inhalt: Fünfter und sechster Fall mit vielen sich daraus ergebenden Kreiskonstruktions-Aufgaben. — Hülfslehrsätze.

Heft 15. Trigonometrie: Berechnungs-Aufg. (2. Teil.) **Das gleichschenklige Dreieck.**
Inhalt: Aufstellung der mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks sich ergebenden Formeln zur Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. — Die 5 möglichen Fälle. — Reguläre Polygone. — Praktische Aufgaben. — Berechnung der trig. Funktionen sehr kleiner Winkel (scheinbare Grösse).

Heft 16. Algebra: Zinseszinsrechg. (2. Teil.)
Inhalt: Aufstellung der Zinseszinsformeln, wenn das Kapital, welches auf Zinseszinsen ausgeliehen ist, jährlich um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird. — Praktische Aufgaben.

u. s. f., u. s. w.

Buchdruckerei von Hammer & Liebich in Stuttgart.

Elftes Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Inhalt: **Algebra.** Die Reihen. 2. Teil. **Geometrische Reihen.** Seite 17—32.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstgebrauch —

mit

Angabe der benutzten **Sätze, Formeln, Regeln,**

erläutert durch

viele Zinkographien, Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.

Die Reihen. 2. Teil. Seite 17—32.

Die geometrischen Reihen.

Inhalt:

Erläuternde Fragen mit Antworten über die: geometrischen Reihen — Entwicklung der Formeln — Aufstellung der 20 verschiedenen Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Stuttgart 1881.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das auf der Rückseite abgedruckte Inhalts-Verzeichniss der nächsterscheinenden Hefte wird gefällig

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem bis jetzt **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesammtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** und **Angabe** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** etc., so dass die Lösung Jedermann, der nur Weniges aus der Schule gebracht hat, verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesammtheit ergänzen.

Jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der selbstständigen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen.

Die **ersten** Hefte des Werkes behandeln zunächst den Hauptbestandtheil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Präparanden-Anstalten aller Arten, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, tech. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbl. Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten für das Einjährige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** dieser Fächer, werden durch diese Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert, ihnen die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt und somit an selbstständiges denken und arbeiten gewöhnt; ihnen zugleich der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständniss** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen

2. Teil.

Die geometrischen Reihen

(Geometrische Progressionen).

I.

Erläuternde Fragen mit Antworten, über die: geometrischen Reihen — Entwicklung der Formeln — Aufstellung der 20 verschiedenen Fälle.

Frage 1. Was ist eine **geometrische** Reihe oder eine geometrische Progression?

Anmerkung 1. In der Mathematik gibt es verschiedene Arten geometrischer Reihen; die hier zur Sprache kommenden, heissen kurzweg „**geometrische Reihen**“ oder „geometrische Progressionen“.

Erkl. 1. Eine **geometrische Proportion** oder kurzweg „**Proportion**“, ist die Verbindung zweier gleichen Quotienten durch das Gleichheitszeichen; z. B.:

$$6:3 = 8:4.$$

Sind die mittleren Glieder gleich, so heisst dieselbe eine **stetige** Proportion; z. B.:

$$12:6 = 6:3$$

(siehe Algebra, die Proportionen).

Beispiel 1.

Die Reihen:

a) . . . 2, 4, 8, 16, 32 . . . .

b) . . . 81, 27, 9, 3, 1, $^1/_3$ . . .

sind **geometrische** Reihen; dieselben genügen der Definition unter 1) und 2), wovon man sich leicht überzeugen kann, genügen aber

Antwort. Die Definition einer **geometrischen** Reihe oder einer geometrischen Progression kann man auf folgende Arten geben:

1) Jede reihenartige Anordnung fortschreitender Zahlengrössen, bei welchen das Gesetz stattfindet, dass jedes folgende Glied der Reihe dadurch entsteht, dass das vorhergehende mit ein und derselben Zahl **multipliziert** oder **dividiert** werden muss, heisst eine **geometrische** Reihe oder eine **geometrische** Progression.

2) Eine **geometrische** Reihe ist eine solche Aufeinanderfolge von Zahlen oder gleichartigen Grössen, in welchen der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse ist.

3) Eine Zahlenreihe von der Art, dass irgend drei aufeinanderfolgenden Glieder derselben eine **stetige geometrische** Proportion (Erkl. 1) bilden, nennt man eine **geometrische** Reihe (siehe Beispiel 1).

auch der Definition unter 3); denn wenn irgend drei aufeinanderfolgenden Glieder, z. B. das 4., 5. und 6. der Reihe b) gewählt, so bilden dieselben nach Erkl. 1 die **stetige Proportion**:

$$3 : 1 = 1 : \tfrac{1}{3} \text{ (d. i.: } 1 = 1).$$

Vergleicht man die Definition unter 3) mit der Definition der arithmetischen Reihen im 1. Teil unter 3), dann wird man eine gewisse, leicht zu behaltende Uebereinstimmung in beiden Definitionen finden.

Frage 2. Wie wird der **konstante** Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder einer geometrischen Reihe benannt und bezeichnet?

Antwort. Der **konstante** Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder einer geometrischen Reihe wird **Quotient**, auch Faktor oder Exponent der Reihe genannt und mit dem Buchstaben q (oft auch mit dem Buchstaben e) bezeichnet.

Frage 3. Durch welche Elemente ist zunächst eine geometrische Reihe bestimmt?

Beispiel 2.

Ist das Anfangsglied $a = 4$ und der Quotient $q = 3$, so heisst die geometr. Reihe:
4, 12, 36, 108, 324 . . . .

Beispiel 3.

Ist das zweite Glied einer geometr. Reihe $= 9$ und der Quotient $q = 3$, so ist:
das 3. Glied $= 27$,
„ 4. „ $= 81$,
„ 1. „ $= 3$ u. s. f.

Antwort. Eine geometrische Reihe ist zunächst durch das Anfangsglied a (oder auch durch irgend ein Glied der Reihe) und durch den Quotienten bestimmt, siehe Beisp. 2 und 3.

Frage 4. Wie heisst eine geometrische Reihe in ihrer **allgemeinen** Form und wie ergibt sich aus dieser allgemeinen Form, das sogenannte **allgemeine**, bezw. das **letzte Glied** der Reihe?

Beispiel 4.

Das 4. Glied: aq^3 der nebenstehenden Reihe besteht aus a, mal q in der 3. Potenz (der Stellenzeiger dieses Gliedes ist 4, weil es das 4. Glied der Reihe ist, derselbe um eine Einheit vermindert, gibt 3).

Antwort. Bezeichnet man mit a das Anfangsglied, mit q den Quotienten einer geometrischen Reihe, so heisst dieselbe in ihrer **allgemeinen** Form:

1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.	4. Gl.	5. Gl.	
a,	aq,	aq^2,	aq^3,	aq^4	. . . .

Aus dieser allgemeinen Form ersieht man, dass jedes Glied aus a **mal** derjenigen Potenz des Quotienten q besteht, deren Exponent um **eine Einheit** kleiner als der Stellenzeiger des Gliedes ist (siehe Beisp. 4).

Das n^{te} oder **allgemeine** Glied, heisst hiernach: $a \,.\, q^{n-1}$

Ist die Anzahl der Glieder ebenfalls $= n$, so hat man für das **letzte** Glied t:

Formel 1 . . . . $t = a \,.\, q^{n-1}$

Aus dem **allgemeinen** Gliede, bezw. dem **letzten** Gliede t, kann man jedes Glied der Reihe berechnen; so ist, wenn für n die Zahl 5 gesetzt wird, das 5te Glied $= a \,.\, q^{5-1} = aq^4$.

Frage 5. Wann ist eine geometrische Reihe **steigend** (zunehmend), wann **fallend** (abnehmend)?

Beispiel 5.
Eine steigende geometrische Reihe, ist:
3, 9, 27, 81, 243 . . . .
$q = 3$
oder: $1,\ 1^1/_2,\ 2^1/_4,\ 3^3/_8,\ 5^1/_{16}\ \ldots$
$q = 1^1/_2$

Beispiel 6.
Eine fallende geometrische Reihe, ist:
243, 81, 27, 9, 3 . . . .
$q = {}^1/_3$.

Antwort. Eine geometrische Reihe ist **steigend** (zunehmend), wenn der Quotient q zwischen einem und dem nächstfolgenden Gliede eine **ganze** Zahl oder ein **gemischter** Bruch ist, siehe Beisp. 5; — eine Reihe ist **fallend** (abnehmend), wenn dieser Quotient ein **ächter** Bruch ist, siehe Beisp. 6.

Eine steigende Reihe ist rückwärts gelesen, eine fallende, und umgekehrt.

Frage 6. Wie gross ist die **Summe** s sämmtlicher Glieder einer endlichen geometrischen Reihe, wenn dieselbe in ihrer allgemeinen Form gegeben ist; oder: wie heisst das **summatorische** oder das **summierende Glied** dieser Reihe?

Die Aussage ist zu beweisen.

Antwort. Die **Summe** s der Glieder einer geometrischen Reihe, welche aus n Gliedern besteht — auch das **summatorische** oder das **summierende** Glied der Reihe genannt — ist gegeben durch die Formeln:

Formel 2 . . . . $s = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ oder:

Formel 3 . . . . $s = \dfrac{tq - a}{q - 1}$

Erkl. 2. Das **letzte** Glied einer geometrischen Reihe, ist, wenn man die Anzahl der Glieder mit n bezeichnet, nach Formel 1 $=$
$a \,.\, q^{n-1}$
mithin das vorletzte $= \dfrac{a \,.\, q^{n-1}}{q} = aq^{n-2}$
analog das vorvorletzte $= \dfrac{a \,.\, q^{n-2}}{q} = aq^{n-3}$
u. s. f.

Beweis vorstehender Formel 2:

Die gegebene geometrische Reihe in ihrer allgemeinen Form, ist:

1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.	4. Gl.	
a,	aq,	aq^2,	aq^3	. . . .

	vorvorl. Gl.	vorl. Gl.	letztes Gl.	
. . . .	aq^{n-3},	aq^{n-2},	aq^{n-1}	(Erkl. 2)

mithin erhält man die Summe s dieser n Glieder vermittelst der Gleichung:

$$1)\ s = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1} \quad \text{(Erkl. 3)}$$

Aus Gleich. 1) ergibt sich:
$$2)\ sq = \quad aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n$$

wenn man die Gleichung 1) mit q multipliziert und die Glieder der so erhaltenen Gleichung 2) unter die gleichen Glieder der ursprünglichen Gl. 1) setzt.

Erkl. 3. Die Minuszeichen in dieser Gleichung deuten an, dass diese Gleichung, wie später angegeben, von Gleichung 2) subtrahiert werden soll.

Subtrahiert man die obere Gleich. 1) von der unteren Gleich. 2), so fallen auf den rechten Seiten die Glieder:

$$aq,\ aq^2 \ldots aq^{n-3},\ aq^{n-2} \text{ und } aq^{n-1}$$

weg, und es restiert:

$$sq - s = -a + aq^n \text{ oder:}$$

$$s(q-1) = a(q^n - 1);$$

hieraus erhält man:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

die zu beweisende Formel 2.

Erkl. 4. Wird das letzte Glied einer geometrischen Reihe mit t bezeichnet, so ist das vorletzte $= \frac{t}{q}$ oder $= tq^{-1}$, das vorvorletzte $= \frac{tq^{-1}}{q} = tq^{-2}$ u. s. f.

Beweis vorstehender Formel 3:

Die gegebene geometrische Reihe in ihrer allgemeinen Form, ist auch:

1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.		vorvorl. Gl.	vorl. Gl.	letztes Gl.	
$a,$	$aq,$	aq^2	$\ldots$	$tq^{-2},$	tq^{-1}	t	(Erkl. 4)

mithin erhält man die Summe s dieser n Glieder, vermittelst der Gleichung:

$$1)\ s = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + tq^{-2} + tq^{-1} + t \text{ (Erkl. 3)}$$

Aus Gleich. 1) ergibt sich: $$2)\ sq = aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots\ldots + tq^{-1} + t + tq$$

wenn man die Gleichung 1) mit q multipliziert und die Glieder der so erhaltenen Gleichung 2) unter die gleichen Glieder der ursprünglichen Gleichung 1) setzt.

Subtrahiert man die obere Gleich. 1) von der unteren Gleich. 2), so fallen auf den rechten Seiten die gleichen Glieder:

$$aq,\ aq^2 \ldots\ldots tq^{-2},\ tq^{-1},\ t$$

weg, und es restiert:

$$sq - s = tq - a \text{ oder:}$$

$$s(q-1) = tq - a$$

hieraus erhält man:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

die zu beweisende Formel 3.

Frage 7. Wie heisst das **summatorische** Glied s einer **fallenden unendlichen** geometrischen Reihe, bezw. wie wird dasselbe gefunden?

Antwort. Das summatorische Glied s einer endlichen geometrischen Reihe ist nach Formel 2 und 3, entweder:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ oder: } s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

Erkl. 5. Wird ein **ächter** Bruch $\left(q = \frac{1}{m}\right)$ in eine immer höhere Potenz erhoben, so wird der Nenner immer grösser und grösser, mithin der **Wert** des Bruches immer kleiner und kleiner; wird der Potenzexponent **unendlich gross**, so wird der **Wert** des Bruches unendlich klein, bezw. = Null; in Zeichen, wenn $q = \frac{1}{m}$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{\infty} = 0.$$

Nun ist in einer **fallenden** geometrischen Reihe der Quotient q ein **ächter** Bruch ($q < 1$), und ist ausserdem bei einer **unendlichen** Reihe die Anzahl der Glieder $n = \infty$ (unendlich). Nach Erkl. 5 geht daher Formel 2, über in:

$$s = a \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a \,.\, 0 - a}{q - 1} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{0 - a}{q - 1} = \frac{-a}{q - 1}$$

Wird Zähler und Nenner mit — 1 multipliziert, so erhält man:

Formel 4 . . . . $s = \frac{a}{1 - q}$

Diese Formel hätte man auch aus Formel 3 ableiten können, wenn man beachtet, dass bei einer **fallenden** geometrischen Reihe die Glieder immer **kleiner** werden, mithin das letzte Glied t bei einer **unendlichen** Reihe = Null werden muss. In Rücksicht dieser Betrachtung geht Formel 3: $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ über, in:

$$s = \frac{0 \,.\, q - a}{q - 1} = \frac{-a}{q - 1} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{a}{1 - q} \text{ wie Formel 4.}$$

Anmerkung 2. Die Formel 4 ist deshalb hier besonders angegeben, weil dieselbe sehr oft praktische Verwertung findet.

Frage 8. Welche Grössen kommen in einer geometrischen Reihe in Betracht und durch welche Gleichungen ist deren Zusammenhang ausgedrückt?

Antwort. In einer geometrischen Reihe kommen 5 Grössen in Betracht, nämlich: das Anfangsglied a, der Quotient q, die Anzahl n der Glieder, das letzte Glied t und die Summe s aller Glieder.

Der **Zusammenhang** dieser fünf Grössen ist durch die **entwickelten Formeln**, nämlich:

1) $t = a \,.\, q^{n-1}$

2) $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

3) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ und

4) $s = \frac{a}{1 - q}$ (wenn $q < 1$ und $n = \infty$ ist) ausgedrückt.

Diese Formeln bilden daher die **Fundamentalgleichungen** der geometrischen Reihen.

Frage 9. Wieviel und welche Fälle können in Bezug auf die gegebenen und die gesuchten Bestimmungsstücke einer geometrischen Progression stattfinden?

Antwort. In Bezug auf die **gegebenen** und die **gesuchten** Bestimmungsstücke einer geometrischen Reihe, können **zwanzig Fälle** stattfinden, und zwar:

1) q, n, t **gegeben** und a **gesucht,**
2) q, n, s " " " "
3) q, t, s " " " "
4) n, t, s " " " "

5) a, n, t gegeben und q gesucht,
6) a, n, s " " " "
7) a, t, s " " " "
8) n, t, s " " " "

9) a, q, n gegeben und s gesucht,
10) a, q, t " " " "
11) a, n, t " " " "
12) q, n, t " " " "

13) a, q, n gegeben und t gesucht,
14) a, q, s " " " "
15) a, n, s " " " "
16) q, n, s " " " "

17) a, q, t gegeben und n gesucht,
18) a, q, s " " " "
19) a, t, s " " " "
20) q, t, s " " " "

Im nachstehenden sind diese 20 verschiedenen Fälle in Form von allgemeinen Aufgaben behandelt.

II.

Allgemeine Aufgaben über die 20 verschiedenen Fälle.

Aufgabe 1. Wie gross ist das **Anfangsglied** a einer geometrischen Progression, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) $q, n, t,$
b) $q, n, s,$
c) q, t, s und
d) n, t, s?

Formeln: 1) $t = aq^{n-1}$

" 2) $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

" 3) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

Auflösung.

a) Gegeben: $q, n, t.$

Formel 1 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken q, n, t und a; dieselbe nach a aufgelöst, gibt:

Gleichung 1 . . . . $a = \frac{t}{q^{n-1}}$

---

b) Gegeben: $q, n, s.$

Formel 2 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken q, n, s und a; dieselbe nach a aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$s\,(q - 1) = a\,(q^n - 1)$ oder:

Gleichung 2 . . . . $a = \frac{s \,.\, (q - 1)}{q^n - 1}$

---

c) Gegeben: $q, t, s.$

Formel 3 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken q, t, s und a; dieselbe nach a aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = \frac{qt - a}{q - 1}$$

$s\,(q - 1) = qt - a$ oder:

Gleichung 3 . . . . . $a = qt - s\,(q - 1).$

---

d) Gegeben: $n, t, s.$

Will man eine Gleichung herstellen, welche nur die Grössen n, t, s und a enthält, so muss man die Grösse q aus Formel 2 oder 3 eliminieren; dies geschieht, indem man den Wert für q aus Formel 1 (Erkl. 6), nämlich:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

Erkl. 6. Löst man Formel 1 nach q auf, so erhält man der Reihe nach:

$$t = a \,.\, q^{n-1}$$

$$\frac{t}{a} = q^{n-1}$$

beiderseits die $(n-1)^{\text{te}}$ Wurzel gezogen, gibt:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

in Formel 2 oder 3 substituiert. — In beiden Fällen entsteht eine **unreine** Gleichung vom n^{ten} **Grade.**

Dieser Fall lässt daher die Aufstellung einer allgemeinen, nach a aufgelösten Gleichung nicht zu, und richtet sich die **Möglichkeit** der Auflösung einer diesbezüglichen Aufgabe, nach der gegebenen Grösse n (Erkl. 7).

Erkl. 7. Siehe das Kapitel, welches über höhere Gleichungen handelt.

Aufgabe 2. Wie gross ist der **Quotient** q einer geometrischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) $a, n, t,$
b) $a, n, s,$
c) $a, t, s,$
d) n, t, s?

Formeln: 1) $t = a \cdot q^{n-1}$

" 2) $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

" 3) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

Auflösung.

a) Gegeben: $a, n, t.$

Formel 1 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Grössen a, n, t und q; dieselbe nach q aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$t = a \cdot q^{n-1}$$

$$q^{n-1} = \frac{t}{a};$$ beiderseits die $(n-1)^{te}$ Wurzel gezogen, gibt:

Gleichung 4 . . . . $$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

---

b) Gegeben: $a, n, s.$

Die Formel 2 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken a, n, s und q. In dieser Formel kommt aber wieder die gesuchte Grösse q in der n^{ten} und in der 1ten Potenz vor; man hat somit wiederum eine **unreine** Gleichung vom n^{ten} **Grade** aufzulösen.

Dieser Fall lässt daher die Aufstellung einer allgemeinen, nach q aufgelösten Gleichung nicht zu (Erkl. 7

---

c) Gegeben: $a, t, s.$

Formel 3 liefert direkt eine Gleichung, welche nur die Grössen: a, t, s und q

enthält; dieselbe nach q aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

$$s(q-1) = tq - a$$

$$sq - s = tq - a$$

$$sq - tq = s - a$$

$$q(s-t) = s - a \text{ oder:}$$

Gleichung 5 . . . . $q = \frac{s - a}{s - t}$

---

d) Gegeben: n, t, s.

Will man eine Gleichung herstellen, welche nur die Grössen: n, t, s und q enthält, so muss man den Wert für a aus einer der drei Formeln: 1), 2) und 3) berechnen und in eine der übrigen Formeln substituieren, wodurch man abermals eine **unreine** Gleichung vom n^{ten} **Grade** enthält.

Dieser Fall lässt somit die Aufstellung einer allgemeinen, nach q aufgelösten Gleichung, nicht zu (Erkl. 7).

Aufgabe 3. Wie gross ist die **Summe** s der n Glieder einer geometrischen Reihe, oder: wie heisst das **summatorische Glied** s einer solchen Progression, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) a, q, n,
b) a, q, t,
c) a, n, t,
d) q, n, t?

Formeln: 1) $t = aq^{n-1}$

" 2) $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

" 3) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

Auflösung.

a) Gegeben: a, q, n.

Formel 2 liefert die gewünschte Gleichung:

Gleichung 6 . . . . $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

---

b) Gegeben: a, q, t.

Formel 3 liefert die gewünschte Gleichung:

Gleichung 7 . . . . $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

---

c) Gegeben: a, n, t.

Zur Herstellung einer Gleichung, welche nur die Stücke: a, n, t und s enthält, setze man den Wert für q (Erkl. 8) aus Formel 1 in 3 ein, so erhält man:

$$s = \frac{t \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a}{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1}$$

Erkl. 8. Aus Formel 1 erhält man:

$$q = \sqrt[n-1]{t:a}$$

Da nun jede Wurzelgrösse als **Potenz** mit gebrochenem **Exponenten** geschrieben werden kann, so kann man auch für: $\sqrt[n-1]{t:a}$ setzen:

$$q = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Diese Gleichung kann man noch, wie folgt, reduzieren:

$$s = \frac{t \cdot \frac{t^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a}{\frac{t^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - 1}$$

$$s = \frac{\frac{t \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}}{\frac{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}} \quad \text{(Erkl. 9)}$$

Erkl. 9. Ein Bruch bleibt **unverändert**, wenn man **Zähler** und **Nenner** mit ein und derselben Zahl $\left(a^{\frac{1}{n-1}}\right)$ **multipliziert.**

$$s = \frac{t \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} \quad \text{(Erkl. 10)}$$

Erkl. 10. Potenzen mit **gleichen** Basen werden multipliziert, indem man diese Basis beibehält und die Exponenten addiert.

$$s = \frac{t^{1+\frac{1}{n-1}} - a^{1+\frac{1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$s = \frac{t^{\frac{n-1+1}{n-1}} - a^{\frac{n-1+1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

Gleichung 8 . . . . $$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

---

d) Gegeben: q, n, t.

Setzt man den Wert für a $\left(= \frac{t}{q^{n-1}}\right)$ aus Formel 1, in Formel 2, so entsteht eine Gleichung, welche nur die in Frage kommenden Stücke enthält, nämlich:

$$s = \frac{t}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{oder:}$$

Gleichung 9 . . . . $$s = \frac{t(q^n - 1)}{(q - 1)q^{n-1}}$$

Aufgabe 4. Wie gross ist das **Endglied** t einer geometrischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) a, q, n,
b) a, q, s,
c) a, n, s,
d) q, n, s?

Formeln: 1) $t = a q^{n-1}$

„ 2) $s = a \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

„ 3) $s = \dfrac{tq - a}{q - 1}$

Auflösung.

a) Gegeben: a, q, n.

Formel 1 liefert direkt die gesuchte Gleichung:

Gleichung 10 . . . . $t = a \, . \, q^{n-1}$

---

b) Gegeben: a, q, s.

Formel 3 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken: a, q, s und t; dieselbe nach t aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

$$s(q - 1) = tq - a$$

$$tq = s(q - 1) + a$$

Gleichung 11 . . . . $$t = \frac{s(q - 1) + a}{q}$$

---

c) Gegeben: a, n, s.

Will man eine Gleichung herstellen, welche nur die gegebenen Stücke a, n, s und das gesuchte Stück t enthält, so muss man den Wert für q aus einer der Fundamentalformeln bestimmen und in eine der beiden übrigen Formeln substituieren; in allen Fällen erhält man abermals eine **unreine** Gleichung vom n^{ten} **Grade.**

Dieser Fall lässt somit die Aufstellung einer allgemeinen, nach t aufgelösten Gleichung nicht zu (Erkl. 7).

---

d) Gegeben: q, n, s.

Setzt man den Wert für a $\left(=\frac{t}{q^{n-1}}\right)$ aus Formel 1, in Formel 2, so erhält man eine Gleichung, welche nur die Stücke q, n, s und t enthält, nämlich:

$$s = \frac{t}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Diese Gleichung nach t aufgelöst, gibt:

$$s \cdot q^{n-1}(q-1) = t(q^n - 1) \quad \text{oder:}$$

Gleichung 12 .... $t = \frac{s \cdot (q-1) \cdot q^{n-1}}{q^n - 1}$

Aufgabe 5. Wie gross ist die **Anzahl** n aller Glieder einer geometrischen Reihe, wenn der Reihe nach gegeben ist:

a) a, q, t,
b) a, q, s,
c) a, t, s,
d) q, t, s?

Formeln: 1) $t = a q^{n-1}$

„ 2) $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

„ 3) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

Erkl. 11. Die 4 Fälle, welche in Aufgabe 5 enthalten sind, ergeben **Exponentialgleichungen**, das sind solche, in welchen die Unbekannte als Exponent einer Potenz erscheint. Will man eine **Exponentialgleichung** auflösen, so betrachte man zunächst die **ganze** Potenz, in welcher die Unbekannte als Exponent vorkommt, als Unbekannte und löse nach derselben auf; um dann ferner die Unbekannte aus dem Exponenten zu entfernen, logarithmiere man die ganze Gleichung, wonach die Unbekannte als Faktor erscheint.

Erkl. 12. Der log einer Potenz ist gleich dem Exponenten mal dem log der Basis.
Der log eines Bruches ist gleich dem log des Zählers minus dem log des Nenners.

Auflösung.

a) Gegeben: a, q, t.

Die Formel 1 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken a, q, t und n. Diese Gleichung:

$$t = a \cdot q^{n-1}$$

ist eine **Exponentialgleichung**, weil die Unbekannte n als Exponent einer Potenz vorkommt und wird nach Erkl. 11, wie folgt, aufgelöst:

$$q^{n-1} = \frac{t}{a}$$

$$(n-1) \log q = \log t - \log a \quad \text{(Erkl. 12)}$$

$$n - 1 = \frac{\log t - \log a}{\log q}$$

hieraus erhält man:

Gleichung 13 .... $n = \frac{\log t - \log a}{\log q} + 1$

---

b) Gegeben: a, q, s.

Die Formel 2 liefert direkt eine Gleichung zwischen den Stücken a, q, s und n; dieselbe nach Erkl. 11 und 12 aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s(q-1) = a(q^n - 1)$$

$$a q^n = s(q-1) + a$$

$$q^n = \frac{s(q-1)+a}{a}$$

$$n . \log q = \log[s(q-1)+a] - \log a$$

oder:

Gleichung 14 . . . . $n = \dfrac{\log[s(q-1)+a] - \log a}{\log q}$

---

c) Gegeben: a, t, s.

Will man eine Gleichung herstellen, welche nur die Grössen: a, t, s und n enthält, so muss man q aus einer der drei Fundamentalformeln eliminieren; dies kann auf verschiedene Arten geschehen: — unter anderem ist z. B. die Grösse q in Gleichung 5: $q = \frac{s-a}{s-t}$ bereits in s, a und t ausgedrückt; setzt man diesen Wert für q $\left(= \frac{s-a}{s-t}\right)$ in Formel 1 ein, so entsteht eine Gleichung, welche nur die Grössen: a, s, t und n enthält, nämlich:

$$t = a \cdot \left(\frac{s-a}{s-t}\right)^{n-1}$$

Wird diese Gleichung nach den Erklärungen 11 und 12 aufgelöst, so erhält man der Reihe nach:

$$\left(\frac{s-a}{s-t}\right)^{n-1} = \frac{t}{a}$$

$$(n-1)[\log(s-a) - \log(s-t)] = \log t - \log a$$

$$n - 1 = \frac{\log t - \log a}{\log(s-a) - \log(s-t)} \text{ oder:}$$

Gleichung 15 . . . $n = \dfrac{\log t - \log a}{\log(s-a) - \log(s-t)} + 1$

---

d) Gegeben: q, t, s.

Will man eine Gleichung herstellen, welche nur die Grössen q, t, s und n enthält, so kann man — um keine ver-

Erkl. 13. Wird Gleichung 5: $q = \frac{s-a}{s-t}$ nach a aufgelöst, so erhält man:

$$qs - qt = s - a$$

$$a = qt - qs + s$$

oder: $$a = qt - s(q-1)$$

wickelte Gleichung zu erhalten — die bereits nach n aufgelöste Gleichung 13:

$$n = \frac{\log t - \log a}{\log q} + 1$$

benutzen, indem man in dieselbe den sich aus Gleichung 5 ergebenden Wert für a (Erkl. 13) substituiert. Hierdurch erhält man:

Gleichung 16 . . . $$n = \frac{\log t - \log[qt - s(q-1)]}{\log q} + 1$$

Anmerkung 3. In vorstehenden fünf Aufgaben sind die 20 verschiedenen Fälle, welche sich in Bezug auf **ein** gesuchtes und **drei** gegebene Bestimmungsstücke einer geometrischen Reihe aufstellen lassen, behandelt. Für die allgemeinen Lösungen dieser 20 Fälle ergaben sich nur **16** allgemeine Gleichungen, bezw. Formeln, weil bei 4 derselben **unreine** Gleichungen **höheren Grades** entstanden, deren spez. Auflösungen in das Gebiet der höh. Mathematik gehören.

Unter den 16 aufgestellten allgemeinen Gleichungen befinden sich auch die drei Fundamentalformeln, welche zur Entwicklung der übrigen allgemeinen Gleichungen erforderlich waren; diese drei Fundamentalformeln, bezw. die Gleichungen 6, 7 und 10 müssen daher dem Gedächtnisse anvertraut werden.

III.

Praktische Aufgaben.

Anmerkung 4. Die beiden folgenden Aufgaben sollen zeigen, wie man in den 4 Fällen verfährt, in welchen sich keine allgemeine Gleichungen aufstellen liessen.

Aufgabe 6. Von einer geometrischen Reihe kennt man das Anfangsglied $a = 4$, die Anzahl der Glieder $n = 2$, die Summe der Glieder $s = 24$; wie gross ist das Endglied t dieser geometrischen Reihe?

Formeln: 1) $t = aq^{n-1}$

„ 2) $s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$

Gegeben: $a = 4$
$n = 2$
$s = 24$

Gesucht: t.

Auflösung.

Zwischen den Grössen: a, n, s und t konnte man in Aufg. 4 unter c) keine allgemeine, nach t aufgelöste Gleichung aufstellen.

In Rücksicht der gegebenen Zahlen ($n = 2$) und bei näherer Betrachtung der Formeln 1) und 2) ist ersichtlich, dass man aus Formel 2) zunächst die Grösse q berechnen und den für q gefundenen Wert zur Berechnung der gesuchten Grösse t in Formel 1) substituieren kann.

Werden die Zahlenwerte in Formel 2) substituiert, so erhält man:

$$24 = 4 \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1}$$

Diese Gleichung nach q aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$24(q-1) = 4(q^2-1)$$
$$24q - 24 = 4q^2 - 4$$
$$4q^2 - 24q = -20$$
$$q^2 - 6q = -5 \quad \text{(Erkl. 14)}$$
$$q^2 - 6q + 3^2 = -5 + 3^2 \quad \text{(Erkl. 15)}$$
$$(q-3)^2 = -5 + 9$$
$$q - 3 = \pm\sqrt{4}$$

$q - 3 = \pm 2$; hieraus erhält man:

$q_{,} = 5$ und $q_{,,} = 1$.

Wird der Wert für $q = 5$ (Erkl. 16) in Formel 1) substituiert, so erhält man mit Berücksichtigung der übrigen Zahlenwerte, die Gleichung:

$t = 4 \,.\, 5^{2-1} = 4 \,.\, 5$ oder:

$t = 20$; dies ist das gesuchte Endglied t.

Erkl. 14. Der Koeffizient von q^2 wurde durch Division der ganzen Gleichung mit 4, entfernt.

Erkl. 15. Um auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat zu erhalten, wurde beiderseits $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2$ addiert.

Erkl. 16. Der zweite Wert für den Quotienten q ($q_{,,} = 1$) genügt der Aufgabe nicht; denn hiernach wären alle Glieder gleich und 2 Glieder ($n = 2$), jedes $= 4$ ($a = 4$) gibt nicht die gegebene Summe ($s = 24$).

Aufgabe 7. Von einer geometrischen Progression kennt man: die Anzahl der Glieder, $n = 2$, das letzte Glied, $t = 20$, und die Summe aller Glieder, $s = 24$; wie gross ist das Anfangsglied a?

Formeln: 1) $t = aq^{n-1}$

„ 2) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

Gegeben: $n = 2$
$t = 20$
$s = 24$

Gesucht: a.

Auflösung.

Zwischen den Grössen n, t, s und a konnte man in Aufgabe 1 unter d) keine allgemeine, nach a aufgelöste Gleichung herstellen.

In Rücksicht der gegebenen Zahlen ($n = 2$) und bei näherer Betrachtung der Formeln 1) und 2) ist ersichtlich, dass man die unbekannte Grösse q aus Formel 2) eliminieren kann, wenn man den Wert für q aus Formel 1) in 2) substituiert.

Setzt man die gegebenen Zahlen in Formel 1) ein und löst dieselbe nach q auf, so erhält man der Reihe nach:

$$20 = a \cdot q^{2-1}$$

$$20 = a \cdot q \text{ oder:}$$

$$q = \frac{20}{a}.$$ Diesen Wert für q und die gegebenen Zahlen in Formel 2) substituiert, gibt:

$$24 = \frac{20 \cdot \frac{20}{a} - a}{\frac{20}{a} - 1}$$

Wird diese Gleichung nach a aufgelöst, so erhält man der Reihe nach:

$$24\left(\frac{20}{a} - 1\right) = 20 \cdot \frac{20}{a} - a$$

$$\frac{480}{a} - 24 = \frac{400}{a} - a$$

$$480 - 24a = 400 - a^2$$

$$a^2 - 24a = -80$$

$$a = 12 \pm \sqrt{-80 + 12^2} \text{ (Erkl. 17)}$$

$$a = 12 \pm 8, \text{ mithin:}$$

$$a_{,} = 20 \text{ oder:}$$

$$a_{,,} = 4.$$

Der 1ste Wert: $a_{,} = 20$ hat für die Aufgabe keinen Sinn, da die Summe aller Glieder $= 24$ sein soll, hier aber die Summe des ersten und letzten Gliedes schon grösser als 24, nämlich: $20 + 20 = 40$ wäre. — Das gesuchte Anfangsglied ist somit $= 4$.

Erklärung 17.

$$a^2 - 24a = -80$$

$$a^2 - 24a + \left(\frac{24}{2}\right)^2 = -80 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$

$$(a - 12)^2 = -80 + 12^2$$

$$a - 12 = \pm\sqrt{-80 + 12^2}$$

$$a = 12 \pm \sqrt{-80 + 144}$$

$$a = 12 \pm \sqrt{64}$$

$$a = 12 \pm 8$$

$$a_{,} = 20$$

$$a_{,,} = 4.$$

IV.

Anhang ungelöster Aufgaben.

Aufgabe 1. Wie gross ist das Endglied t und das summatorische Glied s einer geometrischen Reihe, wenn $a = \frac{1}{2}$, $q = 2$ und $n = 5$ ist?

Aufgabe 2. Wie gross ist: t und q, wenn $a = 4$, $n = 2$ und $s = 24$ ist?

Aufgabe 3. Wie gross ist: a und s, wenn $q = 2$, $n = 7$ und $t = -192$ ist?

und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwerthungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Dieses Werk, welches durch sein **fortlaufendes** Erscheinen **stets auf der Höhe der Zeit steht,** kann Jedermann empfohlen werden — jedes Heft hat einen **reellen Wert** und bildet ein abgeschlossenes Ganze. — Es wird mit den Jahren ein **mathematisch-naturwissenschaftliches Lexikon,** in welchem die **mannigfaltigtsen, praktischsten Verwertungen — die Früchte der mathe**matischen **Disciplinen** — von Stufe zu Stufe aufzufinden sind.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, März 1881. **Die Verlagshandlung.**

Inhalts-Verzeichnis.

Am Schlusse der nachstehend verzeichneten Hefte, ausgenommen Heft 10 und 14, ist je eine Anzahl ungelöster Aufgaben angeführt. Die Auflösungen derselben sollen — analog den entsprechenden, gelösten Aufgaben — gesucht werden, wodurch bezweckt wird, dass der Studierende sich zum selbstständigen Arbeiter heranbildet. Die Lösungen dieser Aufgaben werden später in besonderen Heften zur Ausgabe gelangen. Der Inhalt jedes Heftes erleidet nur bei Raummangel eine kleine Abänderung, resp. Kürzung.

rithmischen Grösse, der trig. und cyklometr. Funktionen etc. — mit vielen gelösten und Anhängen von ungelösten Aufgaben.

Heft 7. Algebra: Die Proportionen. (1. Teil.)
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über Verhältnisse und Proportionen. — Die arithm. Proportionen (Fragen mit Antworten). — Die geometr. Proportionen — Lehrsätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die Summen u. Differenzensätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die laufenden Proportionen. — Gegebene Proport. in laufende zu verwandeln — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 8. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. (1. Teil.)
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Konstruktion planimetr. Aufgaben durch die algebraische Analysis. — Einfache algebr. Ausdrücke — Hülfssätze — Konstruktion der einfachen algebr. Ausdrücke — Konstruktion der vierten, dritten u. mittleren Proportionalen. — Konstruktion zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 9. Algebra: Die Reihen. (1 Teil.) **Die niederen arithmet. Reihen (arithmetische Progressionen).**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: arithmet. Reihen. — Entwicklung der Formeln, Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied Fälle. — Prakt. Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgab.

Heft 10. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs- (Taktions-) Problem. (1. Teil.)
Inhalt: Vorbemerkung. — Aufstellung der 10 mögl. Fälle. — Die 10 mögl. Fälle mit vielen sich daraus ergebenden besonderen Kreiskonstruktionsaufgaben.

Heft 11. Algebra: Die Reihen. (2. Teil.) **Die geometrischen Reihen.**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: geometrischen Reihen. — Entwicklung der Formeln. — Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 12. Stereometrie: Körperberechnungen. (2. Teil.) **Die Pyramide.**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Definition, Erzeugung, Bestandteile etc. der Pyramide im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Berechnung der Pyramiden, besonders der geraden Pyramiden; — Entwicklung der vorkommenden Formeln. — Prakt. Aufgaben über die gerade Pyramide. — Anhang ungelöst. Aufgab.

Heft 13. Stereometrie: Körperberechnungen. (3. Teil.) **Der Pyramidenstumpf.**
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Pyramidenstumpf im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Pyramidenstumpfes. — Aufgaben.

Heft 14. Planimetrie: Das Apollonische Berührungsproblem. (2. Teil.)
Inhalt: Fünfter und sechster Fall mit vielen sich daraus ergebenden Kreiskonstruktionsaufgaben. — Hülfslehrsätze.

Heft 15. Trigonometrie: Berechnungs-Aufg. (2. Teil.) **Das gleichschenklige Dreieck.**
Inhalt: Aufstellung der mit Hülfe des rechtswinkligen Dreiecks sich ergebenden Formeln zur Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. — Die 5 möglichen Fälle. Reguläre Polygone. — Praktische Aufgaben. — Berechnung der trig. Funktionen sehr kleiner Winkel (scheinbare Grösse).

Heft 16. Algebra: Zinseszinsrechg. (2. Teil.)
Inhalt: Aufstellung der Zinseszinsformeln, wenn das Kapital, welches auf Zinseszinsen ausgeliehen ist, jährlich um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird. — Praktische Aufgaben.

u. s. f., u. s. w.

Buchdruckerei von Hammer & Liebich in Stuttgart.

17. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Inhalt: Algebra. Die Reihen. Gemischte prakt. Aufgaben. 3. Teil. Seite 33—48.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstgebrauch —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.

Die Reihen. 3. Teil. Seite 33—48.

Gemischte praktische Aufgaben über die niederen arithmetischen und geometrischen Reihen.

Stuttgart 1881.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3–4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das auf der Rückseite abgedruckte Inhalts-Verzeichnis der nächsten Hefte wird gefälliger

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesammtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwicklung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesammtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbstständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandtheil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, tech. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbl. Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständniss** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem

3. Teil.

Gemischte praktische Aufgaben über die niederen arithmetischen und geometrischen Reihen.

Anmerkung 1. Die wichtigsten Anwendungen der **geometrischen** Reihen sind in den Kapiteln über Zinseszinsrechnung und Rentenrechnung zu finden.

Aufgabe 1. Ein artesischer Brunnen (Erkl. 1) kostete 4051 ℳ 50 pf. zu bohren. Zur Bohrung des ersten Meters wurden 2 ℳ, für jeden weiteren Meter aber 5 pf. mehr bezahlt als für den nächstvorhergehenden; wie tief ist dieser Brunnen?

Erkl. 1. Die **artesische Brunnen** (Springbrunnen) bestehen aus einem zweiarmigen Heber, dessen kurzer Schenkel (durch einen Erdbohrer gebildet) bis zu einer wasserführenden Schicht niedergeht, und dessen längerer Schenkel (von Natur vorhandener) seine Ausmündung auf einem höher gelegenen Gebiete hat, wo die Speisung durch Tau, Regen und Schnee vor sich geht.

Die artesische Brunnen werden gebildet, indem man Wässern, die zwischen zwei undurchdringlichen Thon- oder Gesteinsschichten eingeschlossen sind, einen künstlichen Abfluss durch ein Bohrloch verschafft. Diese Brunnen werden benannt nach der französischen Provinz **Artois**, wo sie zuerst angewandt wurden. Als Erfinder bezeichnet man die Chinesen.

Erkl. 2. Da die einzelnen Glieder der gedachten **arithmetischen** Reihe Geldposten sind, so müssen diese und die übrigen Bestimmungsstücke der Reihe in ein und dieselbe Geldeinheit — hier die Mark — verwandelt werden.

Formel: $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$

Auflösung.

Da nach der Aufgabe für jeden laufenden Meter der Brunnenbohrung 5 pf. **mehr** bezahlt wurden als für den nächst vorhergehenden, so bilden die Preise, welche für Bohrung der einzelnen Meter bezahlt wurden, in ihrer Aufeinanderfolge die steigende **arithmetische** Reihe:

$$2,\ \left(2+\frac{1}{20}\right),\ \left(2+2\cdot\frac{1}{20}\right),\ \left(2+3\cdot\frac{1}{20}\right),\ \left(2+4\cdot\frac{1}{20}\right),\ \ldots$$

(siehe die Definition der **arithmetischen** Reihen, und Erkl. 2).

In dieser arithmetischen Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = 2$ ℳ;
die Differenz $d = \frac{1}{20}$ „ (Erkl. 2)
die Summe aller Glied. $s = 4051\frac{1}{2}$ ℳ
} bekannt

und die Anzahl n der Glieder (Preise), bezw. die Anzahl der Meter, welche der Brunnen an Tiefe besitzt, gesucht.

Setzt man diese Werte in obige Formel:

$$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$$

(siehe deren Entwicklung unter Gleichung 18, Seite 12 und 13)

so erhält man:

$$n = -\frac{2\cdot 2 - \frac{1}{20}}{2\cdot\frac{1}{20}} \pm \sqrt{\frac{2\cdot 4051\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}} + \left(\frac{2\cdot 2 - \frac{1}{20}}{2\cdot\frac{1}{20}}\right)^2}$$

$$n = -\frac{4-\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}} \pm \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{8103}{2}}{\frac{1}{20}} + \left(\frac{4-\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}}\right)^2}$$

$$n = -\left(40-\tfrac{1}{2}\right) \pm \sqrt{8103 \cdot 20 + \left(40-\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

$$n = -39\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{162060 + \left(39\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

$$n = -\frac{79}{2} \pm \sqrt{162060 + \frac{79^2}{2^2}}$$

$$n = -\frac{79}{2} \pm \sqrt{\frac{162060 \cdot 4 + 6241}{4}} \quad \text{(Hülfsrechn. 1)}$$

$$n = -\frac{79}{2} \pm \sqrt{\frac{648240 + 6241}{4}}$$

$$n = -\frac{79}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{654481}$$

$$n = -\frac{79}{2} \pm \frac{809}{2} \quad \text{(Hülfsrechn. 2)}$$

Hülfsrechnung.

1)
```
 79 . 79
    711
   553
   6241
```

2) $\sqrt{65{,}44{,}81} = 809$
```
   64
   16,144
     000
 160|14481
     14481
     " " "
```

mithin ist:

$$n_{,} = \frac{-79+809}{2} = \frac{730}{2} = 365 \text{ und}$$

$$n_{,,} = \frac{-79-809}{2} = -\frac{888}{2} = -444$$

Da der zweite Wert für n **negativ** ist, mithin für die Aufgabe keinen Sinn zulässt, so hat man mit:

$$n_{,} = 365$$

die **Anzahl** der Preise, welche für die einzelnen Meter gezahlt wurden, mithin auch die Anzahl der Meter, welche der Brunnen an Tiefe besitzt, gefunden.

Aufgabe 2. Auf einem Dache liegen 21 Ziegelreihen, in der ersten Reihe liegen 18 Ziegel, in jeder folgenden Reihe liegt 1 Ziegel mehr; wieviel Ziegel liegen im ganzen auf dem Dache?

Formel: $s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

Auflösung.

Die Anzahl der Ziegel, welche je in den einzelnen Reihen liegen, bilden in ihrer Aufeinanderfolge, die Reihe:

18, 19, 20, 21 . . . . . .

dies ist eine **arithmetische** Reihe, weil die **Differenz** je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine konstante Grösse, nämlich = 1 ist.

Von dieser arithmetischen Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = 18$ }
die Differenz $d = 1$ } gegeben
die Anzahl der Glieder, d. i. die Zahl der Ziegelreihen $n = 21$ }

und ist die Summe s sämmtlicher Glieder, d. i. die Zahl der Ziegel, gesucht.

Mit Benutzung obiger Formel:

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

(siehe deren Entwicklung unter Gleich. 9, S. 10)

erhält man:

$$s = \frac{21}{2}[2.18 + (21-1).1]$$

oder: $s = \frac{21}{2}(36 + 20)$

$$s = \frac{21}{2} \cdot 56$$

$$s = 21.28$$

$s = 588$ (Hülfsrechn. 1)

Die gesuchte Anzahl der auf dem Dache liegenden Ziegel ist somit: 588.

Hülfsrechnung.

1) 21.28
 168
 42
 588

Aufgabe 3. Mittelst Anwendung der geometrischen Reihen soll der **rein periodische** Decimalbruch 7,222 .... in einen gewöhnlichen Bruch (seinen Stammbruch) verwandelt werden.

Formel: $s = \frac{a}{1-q}$

Auflösung.

Den gegebenen **rein** periodischen Decimalbruch (Erkl. 3): 7,222 .... kann man in folgende Summanden zerlegen:

7,00000 ....
+ 0,2 ....
+ 0,02 ...
+ 0,002 ..
+ 0,0002 .... u. s. f., addiert

erhält man: 7,2222 .... den gegebenen Decimalbruch wieder.

Man kann also schreiben:

$$7{,}222\ldots = 7 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots.$$

oder:

$$7{,}222\ldots = 7 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots..$$

oder auch:

$$7{,}222\ldots = 7 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots..$$

Bei näherer Betrachtung der rechten Seite dieser Gleichung ersieht man, dass die Glieder vom zweiten ab eine **fallende unendliche geometrische** Reihe bilden (Erkl. 4), deren summatorisches Glied gebildet werden muss.

In dieser geometrischen Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = \frac{2}{10}$
der Quotient $q = \frac{1}{10}$ (ein ächter Bruch)
die Anzahl d. Glieder $n = \infty$ (unendl.)
} gegeben

und die Summe s aller Glieder gesucht.

Erkl. 3. Einen Decimalbruch, bei welchem eine, oder mehrere Decimalstellen in derselben Reihenfolge wiederkehren, nennt man einen **periodischen** Decimalbruch und die sich wiederholenden Stellen, die Periode desselben.

Beginnt die Periode schon mit der ersten Decimalstelle, so heisst der Decimalbruch ein **rein** periodischer, im anderen Falle ein **unrein** periodischer.

z. B.: 7,222 ...
8,325325 ... sind **rein** periodisch,
während: 0,35757575 ...
4,63824924924 .... **unrein** periodisch
sind.

Erkl. 4. Die in der Auflösung vorkommende Reihe:

$$\frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots.$$

ist eine **geometrische**, weil der **Quotient** je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine konstante Grösse ist (siehe Seite 17), sie ist **fallend**, weil dieser Quotient ein **ächter** Bruch $= \frac{1}{10}$ ist (siehe Seite 19), sie ist schliesslich **unendlich**, weil der gegebene Decimalbruch, aus welchem die einzelnen Glieder der Reihe gebildet wurden, **periodisch** ist, bezw. unzählig viele Decimalstellen hat.

Mit Benutzung obiger Formel:

$$s = \frac{a}{1-q}$$ (siehe deren Entwicklung unter Formel 4, Seite 21)

erhält man:

$$s = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$s = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{10}{10}-\frac{1}{10}}$$

$$s = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$s = \frac{2}{9}$ die Summe aller Glieder der geometrischen fallenden und unendlichen Reihe ist also $= \frac{2}{9}$, mithin der rein periodische Decimalbruch:

$$7{,}222\ldots = 7 + \frac{2}{9} = 7\frac{2}{9}$$

Aufgabe 4. Mittelst Anwendung der geometrischen Reihen soll der rein periodische Decimalbruch 0,378378 .... in einen gewöhnlichen Bruch (seinen Stammbruch) verwandelt werden.

Formel: $s = \frac{a}{1-q}$

Auflösung.

Analog der Aufgabe 3 kann man den gegebenen Decimalbruch: 0,378378.... in folgende Summanden zerlegen:

$$\begin{array}{l} 0{,}378 \\ +0{,}000378 \\ +0{,}000000378 \ldots \text{ u. s. f.,} \\ \hline 0{,}378378378 \ldots \end{array}$$

addiert erhält man: 0,378378378 .... den ursprünglichen Decimalbruch wieder.

Man kann also schreiben:

$$0{,}378378\ldots = 0{,}378 + 0{,}000378 + 0{,}000000378 + \ldots\ldots$$

oder: $$0{,}378378\ldots = \frac{378}{1000} + \frac{378}{1000000} + \frac{378}{1000000000} + \ldots\ldots$$

oder auch: $$0{,}378378\ldots = \frac{378}{1000} + \frac{378}{1000^2} + \frac{378}{1000^3} + \ldots\ldots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bildet eine **fallende unendliche geometrische** Reihe (Erkl. 4); von derselben, ist:

das Anfangsglied $a = \frac{378}{1000}$

der Quotient $q = \frac{1}{1000}$ (ein ächter Bruch)

und die Anzahl der Glieder $n = \infty$ (unendlich) bekannt, das summatorische Glied s gesucht.

Mit Benutzung vorstehender Formel:

$s = \frac{a}{1-q}$ (siehe deren Entwicklung unter Formel IV., S. 21)

erhält man:

$$s = \frac{\frac{378}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{\frac{378}{1000}}{\frac{1000}{1000} - \frac{1}{1000}}$$

$$s = \frac{\frac{378}{1000}}{\frac{999}{1000}}$$

$$s = \frac{378}{999}; \text{ dies abgekürzt, gibt:}$$

$$s = \frac{42}{111} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{14}{37}$$

Der rein periodische Decimalbruch: 0,378378... ist somit in seinen Stammbruch ausgedrückt $= \frac{14}{37}$

Aufgabe 5. Mittelst Anwendung der geometrischen Reihen soll der **unrein periodische** Decimalbruch 3,251818.... in einen gewöhnlichen Bruch (seinen Stammbruch) verwandelt werden.

Formel: $s = \frac{a}{1-q}$

Auflösung.

Analog der Aufgabe 3 kann man den gegebenen **unrein** periodischen Decimalbruch (Erkl. 3) 3,251818.... in folgende Summanden zerlegen:

$$\begin{array}{l} \,3{,}25 \\ +\,0{,}0018 \\ +\,0{,}000018 \\ +\,0{,}00000018 \text{ u.s.f.; addiert} \\ \hline \end{array}$$

erhält man: 3,25181818 den gegebenen Decimalbruch wieder.

Man kann also schreiben:

$$3{,}251818\ldots. = 3{,}25 + 0{,}0018 + 0{,}000018 + 0{,}00000018 + \ldots.$$

$$\text{oder: } 3{,}251818\ldots. = 3\frac{25}{100} + \frac{18}{10000} + \frac{18}{1000000} + \frac{18}{100000000} + \ldots.$$

$$\text{oder auch: } 3{,}251818\ldots. = 3\frac{1}{4} + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^4 . 10^2} + \frac{18}{10^4 . 10^4} + \frac{18}{10^4 . 10^6} + \ldots.$$

Bei näherer Betrachtung ersieht man, dass die Glieder auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, und zwar **vom zweiten ab**, eine **fallende unendliche geometrische** Reihe bilden (Erkl. 4).

Von dieser geometr. Reihe kennt man:

das Anfangsglied $a = \frac{18}{10^4}$

den Quotient $q = \frac{1}{10^2}$ (ein ächter Bruch)

die Anzahl der Glieder $n = \infty$ (unendlich).

Das summatorische Glied s hat man zunächst zu bestimmen.

Mit Benutzung obiger Formel:

$s = \frac{a}{1-q}$ (siehe deren Entwicklung unter Formel 4, Seite 21)

erhält man:

$$s = \frac{\frac{18}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{\frac{18}{10^4}}{\frac{10^2}{10^2} - \frac{1}{10^2}} = \frac{\frac{18}{10^4}}{\frac{100-1}{10^2}} = \frac{\frac{18}{10^4}}{\frac{99}{10^2}}$$

$$s = \frac{18 \,.\, 10^2}{10^4 \,.\, 99} = \frac{18}{10^2 \,.\, 99} = \frac{2}{100 \,.\, 11}$$

$$s = \frac{1}{50 \,.\, 11} = \frac{1}{550}$$

Der gegebene unrein periodische Decimalbruch 3,251818.... ist somit:

$$= 3\frac{1}{4} + \frac{1}{550} \text{ oder:}$$

$$= 3\frac{275}{1100} + \frac{2}{1100}$$

$$= 3\frac{277}{1100}$$

Aufgabe 6. Zwischen den Zahlen 1 und 7 sollen 6 Zahlen so eingeschaltet (interpoliert) werden, dass eine **geometrische** Reihe entsteht. Wie heisst diese Reihe?

Formel: $t = aq^{n-1}$

Auflösung.

Zür Aufstellung der gesuchten geometrischen Reihe, bezw. zur Aufsuchung der fehlenden 6 Glieder, welche zwischen den Zahlen 1 und 7 eingeschaltet (interpoliert) werden sollen, muss man den Quotienten q der gedachten geometrischen Reihe ermitteln.

Da man von der aufzustellenden geometrischen Reihe

das Anfangsglied $a = 1$

" Endglied $t = 7$ und

die Anzahl aller Glieder $n = 8$ (2 Glieder sind gegeben und 6 sollen interpoliert werden, zusammen 8 Glieder)

kennt, so benutzt man zur Auffindung des Quotienten q, obige Formel:

$$t = a \cdot q^{n-1}$$

(siehe deren Entwicklung unter Formel 1, S. 18).

In diese Formel für a, t und n die Werte substituiert, gibt:

$$7 = 1 \cdot q^{8-1} \text{ oder:}$$
$$7 = q^7$$

Zieht man nun beiderseits die 7te Wurzel, so erhält man für den Quotienten q:

$$q = \sqrt[7]{7}$$

Nach der Definition I. der geometrischen Reihen (siehe Frage 1, Seite 17) erhält man hiernach die gesuchte geometrische Reihe:

$$1,\ \sqrt[7]{7},\ (\sqrt[7]{7})^2,\ (\sqrt[7]{7})^3,\ (\sqrt[7]{7})^4,\ (\sqrt[7]{7})^5,\ (\sqrt[7]{7})^6,\ (\sqrt[7]{7})^7$$

$$\text{oder: } 1,\ \sqrt[7]{7},\ \sqrt[7]{7^2},\ \sqrt[7]{7^3},\ \sqrt[7]{7^4},\ \sqrt[7]{7^5},\ \sqrt[7]{7^6},\ 7.$$

Aufgabe 7. Zwischen je zwei Gliedern der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8 u. s. w. noch ein Glied einzuschalten, dass wieder eine geometrische Reihe entsteht. Wie heisst die neue Reihe?

Erkl. 5. Man hätte auch jedes Glied, welches zwischen 2 Glieder der gegebenen Reihe interpoliert werden soll, für sich berechnen können.

z. B. Bezeichnet man das Glied, welches zwischen dem 3. und dem 4. Gliede der gegebenen Reihe interpoliert werden soll, mit z, so bestünde die Gleichung:

$$\frac{z}{4} = \frac{8}{z} \text{ oder:}$$

$$z^2 = 32\text{; hieraus ergibt sich:}$$

$$z = \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

was mit dem 6ten Gliede der nebenan bereits aufgestellten neuen Reihe übereinstimmt.

Auflösung.

Um zwischen je 2 Glieder der **geometrischen** Reihe:

1, 2, 4, 8, ...

noch ein Glied einzuschalten, dass wieder eine **geometrische** Reihe entsteht, muss man den Quotienten suchen, welcher der neuen geometr. Reihe entspricht.

Zu diesem Zwecke beachte man, dass nach der Definition II. der geometrischen Reihen (siehe Frage 1, Seite 17) der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse sein muss.

Bezeichnet man nun das Glied, welches zwischen den beiden ersten Gliedern 1 und 2 der gegebenen geometr. Reihe interpoliert werden soll und welches gleich dem Quotienten der neuen gesuchten Reihe ist, mit q, so hat man hiernach die Gleichung:

$$\frac{q}{1} = \frac{2}{q} \text{ und hieraus erhält man:}$$

$$q^2 = 2 \text{ oder:}$$

$$q = \sqrt{2}$$

Die neue gesuchte geometrische Reihe, heisst mithin:

$$1,\ \sqrt{2},\ (\sqrt{2})^2,\ (\sqrt{2})^3,\ (\sqrt{2})^4,\ (\sqrt{2})^5,\ (\sqrt{2})^6,\ \ldots$$

oder:

$1, \sqrt{2}, 2, (\sqrt{2})^2\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2.\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2.(\sqrt{2})^2.(\sqrt{2})^2 \ldots$

$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 2.2, 2.2.\sqrt{2}, 2.2.2, \ldots$

$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8,$ (Erkl. 5)

Aufgabe 8. Zwischen den Zahlen 2 und 6 sollen noch 3 Glieder eingeschaltet werden, und zwar einmal, dass eine **arithmetische** Reihe, ein andermal, dass eine **geometrische** Reihe entsteht. Wie heissen diese beiden Reihen und welche Glieder sind grösser, die der arithmetischen oder die der geometrischen Reihe?

Formeln: 1) $t = a + (n-1)d$

„ 2) $t = aq^{n-1}$

Auflösung.

Sollen zwischen den Zahlen 2 und 6 drei Glieder eingeschaltet werden, dass eine **arithmetische** Reihe entsteht, so beachte man, dass von der gedachten Reihe

das Anfangsglied $a = 2$
das Endglied $t = 6$ und
die Anzahl der Glieder: $n = 5$ (3 sollen eingeschaltet werden und 2 sind gegeben)

bekannt sind und zur Aufstellung der gesuchten Reihe, die Differenz d zunächst gesucht werden muss; dies kann man aber mit Hülfe obiger Formel 1:

$$t = a + (n-1)d$$

(siehe deren Entwicklung unter Formel 1, S. 4).

Setzt man die bekannten Werte für a, t und n ein, so erhält man:

$6 = 2 + (5-1)d$ oder:

$6 = 2 + 4d$

$6 - 2 = 4d$ und endlich:

$d = 1.$

Die gesuchte **arithmetische** Reihe, heisst hiernach:

$2, (2+1), (2+2.1), (2+3.1), (2+4.1)$ oder:

1) . . . . . $\underline{2, 3, 4, 5, 6.}$

Sollen ferner zwischen den Zahlen 2 und 6 drei Glieder so eingeschaltet werden, dass eine **geometrische** Reihe entsteht, so beachte man, dass von der gedachten Reihe wiederum:

das Anfangsglied $a = 2$
das Endglied $t = 6$ und
die Anzahl der Glieder: $n = 5$

bekannt sind und zur Aufstellung der geometr. Reihe, der Quotient q zunächst gesucht werden muss. Dies geschieht aber mit Hülfe der vorstehenden Form. 2:

$$t = aq^{n-1}$$

(siehe deren Entwicklung unter Formel 1, S. 18).

Setzt man die bekannten Werte für a, t und n ein, so erhält man:

$$6 = 2 \,.\, q^{5-1} \text{ oder:}$$
$$3 = q^4;$$

beiderseits die 4. Wurzel gezogen, gibt:

$$q = \sqrt[4]{3}.$$

Die gesuchte **geometrische** Reihe, heisst somit:

$$2,\ 2 \,.\, \sqrt[4]{3},\ 2 \,.\, (\sqrt[4]{3})^2,\ 2(\sqrt[4]{3})^3,\ 2(\sqrt[4]{3})^4$$

oder:

$$2,\ 2\sqrt[4]{3},\ 2\sqrt[4]{3^2},\ 2\sqrt[4]{3^3},\ 2\sqrt[4]{3^4}$$

oder:

2) . . . $2,\ 2\sqrt[4]{3},\ 2\sqrt[4]{3^2},\ 2\sqrt[4]{3^3},\ 6.$

Bei Vergleichung der einzelnen Glieder der arithmetischen Reihe unter 1), mit den betreffenden Gliedern der geometr. Reihe unter 2), findet man, dass die interpolierten Glieder der arithmetischen Reihe sämmtlich **grösser** sind als die **entsprechenden** interpolierten Glieder der geometrischen Reihe, denn:

$$3 > 2\sqrt[4]{3} \quad (3^4 > 2^4 \,.\, 3)$$
$$4 > 2\sqrt[4]{3^2} \quad (4^4 > 2^4 \,.\, 3^2)$$
$$5 > 2\sqrt[4]{3^3} \quad (5^4 > 2^4 \,.\, 3^3)$$

Aufgabe 9. Ein Spieler verliert in einem Hazardspiele seinen Einsatz mit 24 ℳ; um diesen Einsatz wieder zu gewinnen, verdoppelt er denselben und verliert abermals; darauf nimmt er sich vor, seinen Einsatz bei jedem Verluste zu verdoppeln; wie oft kann er bei andauerndem Verluste setzen, wenn er 6120 ℳ bei sich hat?

Formel: $n = \dfrac{\log\,[s\,(q-1)+a] - \log a}{\log q}$

Auflösung.

Die fortgesetzten Verluste des Spielers bilden in ihrer Aufeinanderfolge die **geometrische** Reihe:

$$24,\ 2 \,.\, 24,\ 2^2 \,.\, 24,\ 2^3 \,.\, 24,\ 2^4 \,.\, 24, \ldots$$

weil jeder Verlust doppelt so gross ist, wie der nächst vorhergehende (siehe Frage 1, Seite 17). Von dieser geometrischen Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = 24$
der Quotient $q = 2$
und die Summe s aller dieser Glieder, bezw. die Summe aller seiner Verluste (d. i. die Summe Geldes, welches der Spieler bei sich hat) $= 6120$ ℳ, gegeben;

und die Anzahl n der Glieder der Reihe, bezw. die Anzahl der Verluste (d. i. die Zahl, welche angibt, wie oft der Spieler einsetzen kann), **gesucht**.

Vorstehende Formel:

$$n = \frac{\log[s(q-1)+a] - \log a}{\log q}$$

(siehe deren Entwicklung unter Gleichung 14, Seite 29) gibt die nach der Grösse n aufgelöste, zu benutzende Gleichung (Erkl. 6).

Erkl. 6. Dem Studierenden wird dringend empfohlen, die in den Auflösungen benutzten Formeln (Gleichungen) stets auf's Neue selbstständig zu entwickeln.

Setzt man in diese Formel die für s, q und a gegebenen Werte ein, so wird:

$$n = \frac{\log[6120(2-1)+24] - \log 24}{\log 2} \text{ oder:}$$

$$n = \frac{\log 6144 - \log 24}{\log 2}$$

$$n = \frac{3,7884512 - 1,3802112}{0,3010300}$$

$$n = \frac{2,4082400}{0,30103}$$

Führt man diese Division aus, so erhält man $n = 8$. Der Spieler kann somit, bei **andauerndem** Verluste, nur 8 mal einsetzen.

Aufgabe 10. Eine Strecke von 960 m wird von einem Körper durchlaufen, der in der ersten Sekunde 25 m und in jeder folgenden 10 m mehr, als in der vorhergehenden, zurücklegt. Wieviel Sekunden braucht der Körper hierzu?

Formel:

$$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$$

Auflösung.

Die Wege, welche der Körper in den einzelnen Sekunden zurücklegt, bilden in ihrer **Aufeinanderfolge**, die Reihe:

$$25,\ (25+10),\ (25+2.10),\ (25+3.10),\ \ldots$$

Diese Reihe ist eine **arithmetische,** weil die **Differenz** je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse, nämlich $= 10$ ist.

Von dieser **arithmetischen** Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = 25$ m
die Differenz $d = 10$ m
die Summe s aller Glieder, das ist die Summe aller einzelnen Wege, bezw. die ganze Strecke, welche der Körper zu durchlaufen hat $= 960$ m, **gegeben**,

und die Anzahl n der Glieder, d. i. die Zahl der einzelnen Strecken, welche der Körper durchläuft, bezw. die Sekundenzahl wie lange der Körper läuft, **gesucht**.

Vorstehende Formel:

$$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$$

(siehe deren Entwicklung unter Gleichung 18, Seite 13)

gibt die nach n aufgelöste, zu benutzende Bestimmungsgleichung an.

Setzt man die für a, d und s bekannten Werte in diese Gleichung ein, so wird:

$$n = -\frac{2.25-10}{2.10} \pm \sqrt{\frac{2.960}{10} + \left(\frac{2.25-10}{2.10}\right)^2}$$

oder: $$n = -\frac{50-10}{20} \pm \sqrt{192 + \left(\frac{50-10}{20}\right)^2}$$

$$n = -\frac{40}{20} \pm \sqrt{192 + \left(\frac{40}{20}\right)^2}$$

$$n = -2 \pm \sqrt{192 + 2^2}$$

$$n = -2 \pm \sqrt{196}$$

$n = -2 \pm 14$ (Hülfsrechnung 1).

Hülfsrechnung.

1) $\sqrt{1|96} = 14$
1
2,96
96
„ „

Hiernach erhält man:

$n_{,} = 12$, d. h. nach 12 Sekunden hat der Körper die Strecke von 960m zurückgelegt. — Ferner erhält man noch einen zweiten Wert für n, nämlich:

$n_{,,} = -16$. Diesem zweiten, negativen Werte für n, kann man nur dann eine Bedeutung beilegen, wenn der Körper schon vor dem Anfangspunkte der Beobachtung sich nach dem angegebenen Gesetze bewegte.

Der Körper befindet sich alsdann nicht nur zu Anfang und Ende jener 12 Sekunden ($n_{,}$) an den Endpunkten der zu durchlaufenden Strecke, sondern auch zu Anfang und Ende von 16 Sekunden in der Vergangenheit ($n_{,,} = -16$), indem man annehmen kann, dass der Körper in der Vergangenheit am Endpunkte der Strecke sich rückwärts über deren Anfangspunkt hinaus und von da wieder vorwärts nach dem Anfangspunkte der Strecke, bezw. der Beobachtung, bewegte.

Aufgabe 11. Ein König in Indien, Namens *Shehram*, verlangte nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers *Asephad*, dass *Sessa*, der Erfinder des

Formel: $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser bescheidene (?) *Sessa* erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbretts, 2 für das 2te, 4 für das 3te und so immer fort für jedes der 64 Felder doppelt soviel Körner, als für das vorhergehende gerechnet werden. Als zusammengezählt wurde, fand man zum Erstaunen des Königs eine ungeheure Summe. Wie gross war diese Summe?

Hülfsrechnung.

$\log 2^{64} = 64 \log 2$

Nun ist: $\log 2 = 0{,}3010300$

$\quad .\,64$

12041200
18061800

$\log 2^{64} = 19{,}2659200$

9022

178
164,5

13,5
11,75

1,75
1,64

mithin:

$2^{64} = 18446757000000000000.$

Auflösung.

Die Mengen der Weizenkörner, welche sich der Erfinder *Sessa* für jedes Feld des Schachbrettes erbat, bilden in ihrer Aufeinanderfolge, die Reihe:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots .$$

Da in dieser Reihe jedes Glied doppelt so gross ist, wie das nächst vorhergehende, so ist nach der Definition der geometrischen Reihen (Frage 1, Seite 17) diese Reihe eine **geometrische**.

Von der vorstehenden Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = 1$
der Quotient $q = 2$
die Anzahl der Glieder $n = 64$ (die Reihe hat soviel Glieder als das Schachbrett Felder hat) bekannt, und
das summatorische Glied s, das ist die Summe aller Weizenkörner, welche sich *Sessa* erbat, gesucht.

Vorstehende Formel:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{(Formel 2, S. 19)}$$

liefert die aufzustellende Bestimmungsgleichung.

Setzt man hierin die für a, q und n gegebenen Werte ein, so erhält man:

$$s = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \quad \text{oder:}$$

$$s = 2^{64} - 1.$$

Den ersten Summanden 2^{64} kann man nun auf zwei Arten berechnen und zwar:

a) durch 7stellige Logarithmen, wonach man erhält:

$$s = 18446757000000000000 - 1 \text{ (Hülfsr.)}$$

annähernd, oder

b) durch fortgesetzte Multiplikation, wonach man erhält:

$$s = 18446744073709551616 - 1$$

oder:

$$s = 18446744073709551615 \textbf{ genau.}$$

Diese ungeheuerliche Summe: 18 Trillionen, 446 tausend 744 Billionen, 73 tausend 709 Millionen und 551 tausend 615 Weizenkörner, kann nach ohngefährer Berechnung kaum in 70 Jahren gewonnen werden, wenn alles feste Land auf der ganzen Erde zum Anbau von Weizen benutzt würde.

Aufgabe 12. Wieviel Schläge macht eine Uhr in 24 Stunden (einem Tage)?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$.

Auflösung.

Vorausgesetzt, dass die betreffende Uhr die ganzen Stunden **voll**, die halben Stunden mit **einem** Schlage angibt und dass die Uhr gerade auf 12 Uhr steht, genügt zur Lösung der gestellten Aufgabe, folgende Betrachtung:

Die Uhr gibt während den 24 Stunden 24 mal die halben Stunden mit einem Schlage an; dann thut die Uhr um 1 Uhr 1 Schlag, um 2 Uhr 2 Schläge, um 3 Uhr 3 Schläge u. s. f. bis 12 Uhr, von da ab wiederholt sie diese Schläge in derselben Reihenfolge. Bezeichnet man nun die gesuchte Summe aller Schläge, welche die Uhr in 24 Stunden thut, mit x, so besteht nach vorstehendem, die Bestimmungsgleichung:

1) . . . . $x = 24 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . + 12)$

Die Glieder in dem Klammerwerte auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden eine **arithmetische** Reihe, weil die **Differenz** je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine konstante Grösse ist (siehe Frage 6, Seite 3).

Von dieser Reihe, ist

das Anfangsglied $a = 1$
die Anzahl der Glieder: $n = 12$
das letzte Glied $t = 12$ } gegeben

und kann man hieraus nach vorstehender

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$ (Formel 2, S. 5)

die Summe s der Glieder der Reihe berechnen. Setzt man für n, a und t die bekannten Werte ein, so wird:

$$s = \frac{12}{2}(1 + 12) \text{ oder:}$$
$$s = 6 . 13$$
$$s = 78.$$

Substituiert man schliesslich in Gleichung 1, für den Klammerwert, die soeben gefundene Zahl 78, so erhält man:

$$x = 24 + 2 . 78$$
$$x = 24 + 156$$

$x = 180$. Die Uhr thut somit, unter der angenommenen Voraussetzung, in einem Tage (24 Stund.) 180 Schläge.

Aufgabe 13. Die drei Ziffern einer Zahl bilden eine arithmetische Progression. — Die Zahl selbst, durch die Summe ihrer Ziffern dividiert, gibt 48, und die mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge geschriebene Zahl ist um 396 kleiner als die gesuchte Zahl. Wie heisst diese Zahl?

Auflösung.

Bezeichnet man die einzelnen Ziffern der gesuchten dreiziffrigen Zahl, der Reihe nach, mit: x, y und z, so hat man, da diese Ziffern eine arithmetische Reihe bilden sollen, die Gleichung:

1) . . . . . $x - y = y - z$ (Erkl. 7)

Ferner soll die Zahl selbst, durch die Summe ihrer Ziffern dividiert, 48 geben; da aber x die Stelle der Hunderter, y die Stelle der Zehner und z die Stelle der Einer vertritt, mithin die Zahl in die Ziffern x, y und z ausgedrückt $= 100x + 10y + z$ ist, so hat man hiernach die weitere Gleichung:

2) . . . $\dfrac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 48$

Schliesslich soll die Zahl, welche in umgekehrter Reihenfolge mit den drei Ziffern: x, y und z geschrieben werden kann, also: $100z + 10y + x$ um 396 kleiner sein, als die gesuchte Zahl: $(100x + 10y + z)$ selbst, somit hat man noch die dritte Gleichung:

3) . . . $100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 396$

Zum Auffinden der drei Ziffern: x, y und z der gesuchten dreiziffrigen Zahl, bestehen also die drei Bestimmungsgleichungen (Erkl. 8):

1) $x - y = y - z$

2) $\dfrac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 48$

3) $100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 396$

diese 3 Gleichungen reduziert, geben:

4) $x - 2y + z = 0$

5) $52x - 38y - 47z = 0$ (Erkl. 9)

6) $x - z = 4$ (Erkl. 10)

Addiert man nun Gleichung 4) und 6), so erhält man:

$2x - 2y = 4$ oder:

7) . . . . . . $x - y = 2$

Multipliziert man ferner Gleichung 6) mit 47 und zieht diese neue Gleichung von Gleich. 5) ab, so erhält man nach Erkl. 11:

8) . . . . . $5x - 38y = -188$

Erkl. 7. Siehe die Definition 3 der arithmetischen Reihen in Frage 6, Seite 3.

Erkl. 8. Soviele unbekannte Grössen in einer Aufgabe vorkommen, soviele Bestimmungsgleichungen müssen aufgestellt werden (siehe: Die Gleichungen).

Erkl. 9. Die Gleichung 2):

$\dfrac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 48$, geht über, in:

$100x + 10y + z = 48x + 48y + 48z$

und hieraus erhält man:

$52x - 38y - 47z = 0.$

Erkl. 10. Die Gleichung 3):

$100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 396$

geht über, in:

$99z - 99x = -396$ oder:

$99x - 99z = 366$

$11x - 11z = 44$

$x - z = 4$

Erkl. 11. Gleichung 6) mit 47 multipliziert, gibt: $47x - 47z = 188$

Diese Gleichung wird, wie folgt, von Gleichung 5) abgezogen:

Gleich. 5) $52x - 38y - 47z = 0$

$47x \quad\quad - 47z = 188$

$- \quad\quad + \quad -$

$5x - 38y = -188.$

Aus den beiden Gleichungen 7) u. 8) erhält man nach Erkl. 12:

$x = 8$; diesen Wert für x in Gleichung 7) substituiert, gibt:

$8 - y = 2$ oder:

$y = 6$.

Setzt man endlich die Werte für x und y in Gleichung 1), so ist:

$8 - 6 = 6 - z$ und hieraus erhält man: $z = 4$.

Da x die Stelle der Hunderter, y die Stelle der Zehner und z die Stelle der Einer in der gesuchten Zahl vertritt, so heisst die gesuchte Zahl:

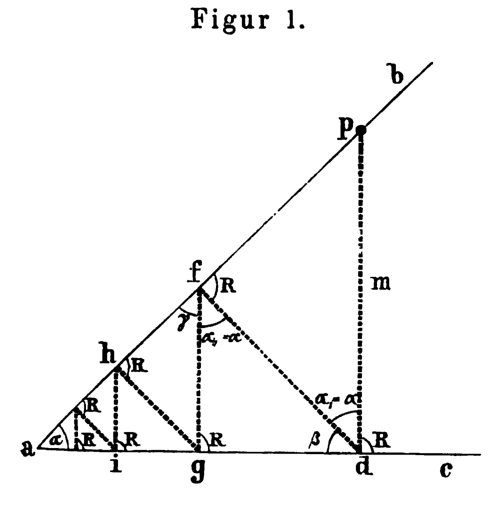
$$100x + 10y + z = 100 . 8 + 10 . 6 + 4 = 800 + 60 + 4 = 864.$$

Erkl. 12. Man multipliziere Gleich. 7) mit 38 und ziehe von dieser neuen Gleichung die Gleich. 8) ab, wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} 38x - 38y &=& 76 \\ 5x - 38y &=& -188 \\ - \quad + & & + \\ \hline 33x &=& 264 \\ x &=& 8. \end{array}$$

Aufgabe 14. Von einem Punkte, der auf dem Schenkel eines Winkels α ($= 60^{0}$) liegt, wird auf den anderen Schenkel eine Senkrechte gefällt, und hierauf aus dem Fusspunkte dieser Senkrechten auf den ersten Schenkel wieder eine Senkrechte gefällt u. s. f. bis in's unendliche (siehe Fig. 1). Wie gross ist die Summe dieser unendlich vielen Senkrechten, wenn die Länge der ersten Senkrechten $= m$ Centimeter beträgt?

Figur 1.



Formel: $s = \frac{a}{1 - q}$

Auflösung.

Um die Summe der Längen der unendlich vielen Senkrechten, welche man sich, wie in Fig. 1 teilweise angegeben, fortgesetzt von dem einen auf den anderen Winkelschenkel gefällt denken kann, zu finden, muss man diese Senkrechten in die gegebenen Bestimmungsstücke ausdrücken. Dies geschieht, wie folgt:

Die Länge des ersten Perpendikels pd ist mit m Centimeter gegeben.

Zur Bestimmung der Länge des zweiten Perpendikels df beachte man, dass in dem rechtwinkligen Dreieck pdf der Winkel $\alpha_{,} =$ dem gegebenen Winkel α ist (siehe Erkl. 13), und dass ferner zwischen der Kathete, bezw. dem zweiten Perpendikel df, der gegebenen Hypotenuse $pd = m$ und dem Winkel $\alpha_{,}$ ($= \alpha$) die Relation besteht:

$$\cos \alpha_{,} = \frac{fd}{pd} \text{ (Erkl. 14)}$$

mithin erhält man für die Länge des zweiten Perpendikels:

1) . . . $\underline{fd} = pd \cos \alpha_{,} = \underline{m . \cos \alpha}$

Auf ganz analoge Weise findet man die Länge des dritten Perpendikels fg.

Da nämlich in dem rechtwinkligen Dreieck fdg, nach Erkl. 15, $\alpha_{,,} = \alpha$ ist, und die Relation:

$$\cos \alpha_{,,} = \frac{fg}{fd} \text{ (Erkl. 14)}$$

besteht, so hat man auch:

$$\cos \alpha = \frac{fg}{fd} \text{ oder:}$$

$$fg = fd \cdot \cos \alpha.$$

Setzt man für fd den bereits gefundenen Wert: $m . \cos \alpha$ ein, so erhält man für die Länge des dritten Perpendikels:

$$fg = m . \cos \alpha . \cos \alpha \text{ oder:}$$

2) . . . $\underline{fg = m . \cos^2 \alpha}$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ersieht man bereits, in welcher Weise die Längen der aufeinanderfolgenden gedachten weiteren Senkrechten sich ergeben, so wird man für die Länge des vierten Perpendikels gh erhalten:

$$\underline{gh = m . \cos^3 \alpha};$$

für die Länge des 5. Perpendikels hi:

$$\underline{hi = m . \cos^4 \alpha} \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

Addiert man nun die Längen dieser unendlich vielen Perpendikel, so erhält man die gesuchte Länge s sämmtlicher Perpendikel, mittelst der Gleichung:

$$s = m + m \cos \alpha + m \cos^2 \alpha + m \cos^3 \alpha + \ldots.$$

Bei näherer Betrachtung der rechten Seite dieser Gleichung ersieht man, dass dieselbe eine **geometrische** Reihe darstellt, weil der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine konstante Grösse, nämlich $= \cos \alpha$ ist (s. Frage 1, Seite 17). Von dieser Reihe, ist:

das Anfangsglied $a = m$;
der Quotient $q = \cos \alpha$ (ächt. Bruch, s. Erkl. 16);
die Anzahl der Glieder: $n = \infty$ (unendlich),
gegeben und die Summe s aller dieser Glieder gesucht.

Da q ein ächter Bruch und $n = \infty$ ist, so kommt zur Berechnung von s vorstehende Formel:

$$s = \frac{a}{1 - q} \text{ (siehe Formel 4, Seite 21)}$$

in Anwendung. Die bekannten Grössen für a und q substituiert, gibt:

$$s = \frac{m}{1 - \cos \alpha}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Erkl. 13. In dem rechtwinkligen Dreiecke adf, ist:

$$\alpha + \beta = R; \text{ ferner ist:}$$
$$\alpha_{,} + \beta = R \text{ (da } pd \perp ac \text{ ist)}$$
$$\alpha - \alpha_{,} = 0$$
$$\alpha = \alpha_{,}$$

Erkl. 14. Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Quotienten, gebildet aus der anliegenden Kathete, geteilt durch die Hypotenuse (siehe: Trigonometrie).

Erkl. 15. In dem rechtwinkligen Dreiecke afg, ist:

$$\alpha + \gamma = R; \text{ ferner ist:}$$
$$\alpha_{,,} + \gamma = R \text{ (da } df \perp ab \text{ ist)}$$
$$\alpha - \alpha_{,,} = 0$$
$$\alpha = \alpha_{,,}$$

Erkl. 16. Der Kosinus eines Winkels ist das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse; da die Hypotenuse aber stets grösser als jede Kathete in demselben Dreiecke ist, so muss der Kosinus eines Winkels stets ein **ächter** Bruch sein (siehe Trigonometrie und Goniometrie).

toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwerthungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Dieses Werk, welches durch sein **fortlaufendes** Erscheinen **stets auf der Höhe der Zeit steht,** kann Jedermann empfohlen werden — jedes Heft hat einen **reellen Wert** und bildet sozusagen ein abgeschlossenes Ganze. — Es wird mit den Jahren ein **mathematisch-naturwissenschaftliches Lexikon,** in welchem die **mannigfaltigsten, praktischsten Verwertungen — die Früchte der mathemathischen Disciplinen** — von Stufe zu Stufe aufzufinden sind.

Der Verfasser hat somit eine **gute, brauchbare und praktische mathemathische - technische - naturwissenschaftliche - 25 - Pfennig - Bibliothek** geschaffen.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, Oktober 1881. **Die Verlagshandlung.**

Inhalts-Verzeichnis.

Am Schlusse der nachstehend verzeichneten Hefte, ausgenommen Heft 10 und 14, ist je eine Anzahl ungelöster Aufgaben angeführt. Die Auflösungen derselben sollen — analog den entsprechenden, gelösten Aufgaben — gesucht werden, wodurch bezweckt wird, dass der Studierende sich zum selbstständigen Arbeiter heranbildet. Die Lösungen dieser Aufgaben werden später in besonderen Heften zur Ausgabe gelangen.

Der Inhalt jedes Heftes erleidet nur bei Raummangel eine kleine Abänderung, resp. Kürzung.

einer konstant. Grösse, eines Produktes, eines Bruches, einer Exponentialgrösse, einer logarithmischen Grösse, der trig. und cyklometr. Funktionen etc. — mit vielen gelösten und Anhängen von ungelösten Aufgaben.

Heft 7. Algebra: Die Proportionen. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über Verhältnisse und Proportionen. — Die arithm. Proportionen (Fragen mit Antworten). — Die geometr. Proportionen — Lehrsätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die Summen u. Differenzensätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die laufenden Proportionen. — Gegebene Proport. in laufende zu verwandeln — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 8. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Konstruktion planimetr. Aufgaben durch die algebraische Analysis. — Einfache algebr. Ausdrücke — Hülfssätze — Konstruktion der einfachen algebr. Ausdrücke — Konstruktion der vierten, dritten u. mittleren Proportionalen. — Konstruktion zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 9. Algebra: Die Reihen. (1 Teil.) Die niederen arithmet. Reihen (arithmetische Progressionen).

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: arithmet. Reihen, — Entwicklung der Formeln, Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Prakt. Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgab.

Heft 10. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs-(Taktions-) Problem. (1. Teil.)

Inhalt: Vorbemerkung. — Aufstellung der 10 mögl. Fälle. — Die 10 mögl. Fälle mit vielen sich daraus ergebenden besonderen Kreiskonstruktionsaufgaben.

Heft 11. Algebra: Die Reihen. (2. Teil.) Die geometrischen Reihen.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: geometrischen Reihen. — Entwicklung der Formeln — Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 12. Stereometrie: Körperberechnungen. (2. Teil.) Die Pyramide.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Definition, Erzeugung, Bestandteile etc. der Pyramide im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Berechnung der Pyramiden, besonders der geraden Pyramiden; — Entwicklung der vorkommenden Formeln. — Prakt. Aufgaben über die gerade Pyramide. — Anhang ungelöst. Aufgab.

Heft 13. Stereometrie: Körperberechnungen. (3. Teil.) Der Pyramidenstumpf.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Definition, Eigenschaften, Bestandteile etc. des Pyramidenstumpfes im allgemeinen. — Erläut. Fragen mit Antworten, über die: Berechnung des Pyramidenstumpfes — besonders d. geraden Pyramidenstumpfes — Entwicklung der vorkommenden Formeln. — Prakt. Aufgaben über den geraden Pyramidenstumpf. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 14. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs-(Taktions) Problem. (2. Teil.)

Heft 15. Trigonometrie: Berechnungs-Aufg. (2. Teil.) Das gleichschenklige Dreieck.

Inhalt: Erläut. Fragen mit Antworten, über die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. — Aufgaben über die 5 mögl. Fälle. Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 16. Algebra: Zinseszinsrechg. (2. Teil.)

Inhalt: Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt wird. — Praktische Aufgaben. — Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 17. Algebra: Die Reihen. (3. Teil.)

Inhalt: Gemischte praktische Aufgaben über die arithmetischen und geometrischen Reihen.

Heft 18. Stereometrie: Körperberechnungen. (4. Teil.) Der Cylinder.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Cylinder im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des Cylinders. — Praktische Aufgaben.

Heft 19. Stereometrie: Körperberechnungen. (5. Teil.) Der Kegel.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Kegel im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Kegels. — Praktische Aufgaben.

Heft 20. Stereometrie: Körperberechnungen. (6. Teil.) Der Kegelstumpf.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Kegelstumpf im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Kegelstumpfes. — Praktische Aufgaben.

☛ Inhalt von Heft 21—40 siehe Heft 18.

Buchdruckerei von Hammer & Liebich in Stuttgart.

26. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Inhalt: Algebra. Die Reihen. 3. Teil. (Fortsetzung). Seite 49—64.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstgebrauch —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.

Die Reihen. (3. Teil — Fortsetzung). Seite 49—64.

Die arithmetischen und geometrischen Reihen.

Inhalt:

Gemischte praktische Aufgaben — Fortsetzung von Heft 16 — besonders auch Aufgaben aus der Physik.

Stuttgart 1881.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das auf der Rückseite abgedruckte Inhalts-Verzeichnis der nächsten Hefte wird gefälliger

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von **25** ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesammtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen,** nebst **Angabe** und **Entwicklung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesammtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbstständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbl. Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten,** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Erkl. 17. Der Kosinus eines Winkels von 60^0 ist $= \frac{1}{2}$ (siehe Goniometrie); in Zeichen:

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

(Beweis mittelst eines gleichseitigen Dreiecks).

Für $\alpha = 60^0$ erhält man nach der Erkl. 17:

$$s = \frac{m}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{m}{\frac{1}{2}} \text{ oder:}$$

$$s = 2 \, . \, m.$$

Bei einem Winkel von 60^0 ist also die Summe aller der unendlich vielen Perpendikel **doppelt** so gross als der **erste** Perpendikel.

Aufgabe 15. Jeder Körper durchfällt im luftleeren Raum in der ersten Sekunde 4,905 m, in jeder folgenden Sekunde aber immer um das doppelte dieser Zahl mehr als in der nächst vorhergehenden. Welchen Raum durchfällt ein Körper in 8 Sekunden?

Formel: $s = \frac{n}{2} (a + t)$

Auflösung.

Nach der Aufgabe durchfällt jeder Körper im **luftleeren** Raum (Erkl. 18)

in der 1. Sek. 4,905 m,
" " 2. " $4{,}905 + 2 \, . \, 4{,}905 = 4{,}905 + 9{,}81$
" " 3. " $4{,}905 + 9{,}81 + 9{,}81 =$
$4{,}905 + 2 \, . \, 9{,}81$, analog
" " 4. " $4{,}905 + 3 \, . \, 9{,}81$
" " 5. " $4{,}905 + 4 \, . \, 9{,}81$ u. s. f.

Erkl. 18. Besondere Aufgaben und Erklärungen über den **freien Fall** der Körper, siehe man in den Teilen, welche über Physik, bezw. Mechanik handeln.

Der Weg s, welchen ein Körper in 8 Sekunden durchfällt, ist mithin bestimmt durch die Gleichung:

$$s = 4{,}905 + (4{,}905 + 9{,}81) + (4{,}905 + 2 \, . \, 9{,}81) + (4{,}905 + 3 \, . \, 9{,}81) + \ldots (4{,}905 + 7 \, . \, 9{,}81)$$

Die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung bilden eine **arithmetische** Reihe, weil jedes Glied dieser Reihe um die **konstante** Grösse 9,81 grösser als das nächst vorhergehende ist (siehe die arithmetischen Reihen).

Das Anfangsglied a dieser Reihe, ist: 4,905,
die Anzahl n der Glieder $= 8$,
das letzte Glied $t = (4{,}905 + 7 \, . \, 9{,}81)$ und
das summatorische Glied s ist gesucht.

Mit Benutzung vorstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2} (a + t)$$ (siehe deren Entwicklung unter Formel II, Seite 5)

erhält man:

$$s = \frac{8}{2} (4{,}905 + (4{,}905 + 7 \, . \, 9{,}81)) \text{ (Anm. 2)}$$

oder:

$$s = 4 \, (4{,}905 + 4{,}905 + 7 \, . \, 9{,}81)$$

$$s = 4 \, (9{,}81 + 7 \, . \, 9{,}81)$$

$$s = 4 \, . \, 8 \, . \, 9{,}81 = 32 \, . \, 9{,}81$$

mithin nach Hülfsrechnung 1:

Anmerkung 2. Setzt man in dieser Gleichung, für die Zeit: 8'' den allgemeinen Wert t'', für 9,81, d. i. die Anziehungskraft (Acceleration) der Erde (bezw. die Schwere des Körpers) den Buchstaben g und für $4{,}905 = \frac{9{,}81}{2} = \frac{g}{2}$, so erhält man:

$$s = \frac{t}{2} \left(\frac{g}{2} + \left(\frac{g}{2} + (t-1) g \right) \right)$$

oder:

$$s = \frac{t}{2} \left(\frac{g}{2} + \frac{g}{2} + tg - g \right)$$

$$s = \frac{t}{2} (g + tg - g)$$

$$s = \frac{t}{2} \cdot tg \text{ und schliesslich:}$$

Formel I. . . $s = \frac{1}{2} g t^2$ Dies ist eine aus der Physik bekannte Formel; dieselbe drückt die Beziehung zwischen dem Weg s, der Zeit t und der Acceleration g der Erde, eines **frei fallenden Körpers** aus (siehe Physik, bezw. Mechanik: die gleichförmig beschleunigte Bewegung fester Körper — den freien Fall).

Hülfsrechnung.

1). 9,81 . 32
 1962
 2943
 313,92

$s = 313,92.$

Der Körper durchfällt somit im luftleeren Raum in dem Zeitraume von 8 Sekunden einen Weg von 313,92 m.

Aufgabe 16. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in **arithmetischer** Progression. Der Flächeninhalt ist $= 294$ qm. Wie gross sind die Seiten?

Erkl. 19. Nimmt man eine Seite eines Dreiecks als Grundlinie an und bezeichnet dieselbe durch g, die zu dieser Seite gehörige Höhe mit h, so hat man für den Inhalt J des Dreiecks, die Gleichung:

$$J = \frac{g \cdot h}{2}$$

Sind die **Katheten** eines **rechtwinkligen** Dreiecks a und b (bezw. x und y), so hat man hiernach für den Inhalt J:

$$J = \frac{a \cdot b}{2} \left(= \frac{x \cdot y}{2}\right)$$

Auflösung.

Bezeichnet man die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit x, die beiden Katheten (ihrer Grösse nach) mit y und z, so bilden nach der Aufgabe diese drei Strecken die steigende arithmetische Reihe:

$$z,\ y,\ x.$$

Es besteht somit nach der Definition 3) in Antwort der Frage 6, Seite 3, die Gleichung:

1) . . . $z - y = y - x$

Dann hat man in dem gedachten rechtwinkligen Dreiecke nach dem pythagoreischen Lehrsatze, die Gleichung:

2) . . . $z^2 = y^2 + x^2$

Ferner hat man noch, da der Inhalt $J = 294$ qm des Dreiecks gegeben ist. nach der Erkl. 19, die Gleichung:

3) . . . $\frac{x \cdot y}{2} = 294$

Aus diesen drei Gleichungen kann man die Grössen: x, y und z, wie folgt berechnen:

Aus Gleichung 1) erhält man:

4) . . . $z = 2y - x$; diesen Wert für z in Gleichung 2) substituiert, gibt:

$$(2y - x)^2 = y^2 + x^2 \text{ oder:}$$
$$4y^2 - 4xy + x^2 = y^2 + x^2$$
$$3y^2 - 4xy = 0$$

Diese Gleichung mit y dividiert, gibt:

$$3y - 4x = 0 \text{ oder:}$$
$$3y = 4x$$

5) . . . . $y = \frac{4}{3} x$

Substituiert man diesen Wert für y in Gleichung 3), so wird:

$$\frac{x \cdot \frac{4}{3} x}{2} = 294 \text{ oder:}$$

$$\frac{2}{3}x^2 = 294$$

$$x^2 = \frac{3 \, . \, 294}{2} = 3 \, . \, 147 = 441$$

$$x = \pm\sqrt{441} = \pm 21 \quad \text{(Hülfsr. 1)}$$

Da das **negative** Vorzeichen für x (als lineare Grösse) keinen Sinn zulässt, so ist: $x = 21$

Mit Hülfe der Gleichung 5) erhält man hiernach:

$$y = \frac{4}{3} \cdot 21 = 28$$

Mit Rücksicht der für x und y gefundenen Werte, erhält man nach Gleichung 4):

$$z = 2 \, . \, 28 - 21 = 56 - 21$$

oder: $z = 35$

Die gesuchten Seiten: x, y und z des gedachten rechtwinkligen Dreiecks sind somit: 21m, 28m und 35m.

Hülfsrechnung.

1) $\sqrt{4,41} = 21$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 4|4 \\ 4 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline \text{"} \end{array}$$

Aufgabe 17. Die sämmtlichen Leute eines Infanterie-Regiments können in der Form eines gleichseitigen Dreiecks so aufgestellt werden, dass in dem ersten Gliede 1 Mann, in dem zweiten 2, in dem dritten 3 u. s. w. stehen. Werden die Reserven eingezogen, so fehlen noch 385 Mann, um sie in einem vollen Quadrate aufstellen zu können, in dessen Seite 5 **Mann** mehr stehen, als in der Seite des gleichseitigen Dreiecks. Wie stark ist das Regiment ohne die Reservemannschaft?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

Auflösung.

Die Mannschaften, welche in den einzelnen Reihen des gedachten gleichseitigen Dreiecks stehen und in ihrer Gesammtheit die Stärke des Regiments ohne Reserve ausmachen, bilden in ihrer Aufeinanderfolge die **arithmetische** Reihe (Erkl. 20):

$$1, \; 2, \; 3, \; 4 \; \ldots . \; (z-2), \; (z-1), \; z$$

wenn man mit z die noch unbekannte Anzahl der Soldaten bezeichnet, welche in der **letzten** Reihe stehen. Da nun das gedachte Dreieck ein **gleichseitiges** ist, so ist die Anzahl der Soldatenreihen, bezw. die **Anzahl n der Glieder** vorstehender arithmetischen Reihe gleich der Anzahl z der Soldaten, welche in der letzten Reihe stehen. Das summatorische Glied s obiger Reihe, welches die Anzahl der Soldaten, die in dem gleichseitigen Dreieck stehen, bezw. die gesuchte Stärke des Regiments ohne Reserve angibt, findet man nach der Formel:

Erkl. 20. In der nebenstehenden Reihe ist die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse, nämlich = 1, folglich ist diese Reihe eine **arithmetische** (siehe: Die arithmet. Reihen, Seite 8).

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$ (siehe Formel 2, Seite 5)

wenn man für n und t die Grösse z, für $a = 1$ setzt, aus der Gleichung:

1) . . . . $s = \frac{z}{2}(1 + z)$

Zur Aufstellung einer weiteren Bestimmungsgleichung, aus welcher zunächst die noch **unbekannte** Grösse z berechnet werden kann, genügt die Betrachtung:

Nach der Aufgabe sollen die Mannschaften: $\frac{z}{2}(1 + z)$ des Regiments plus der **Reserve**, welche gleich der Regimentsstärke: $\frac{z}{2}(1 + z)$ angenommen wird, plus den noch fehlenden 385 Mann gleich der Anzahl $(z + 5)^2$ (Erkl. 21) Soldaten sein, welche sich in ein Quadrat aufstellen lassen, dessen Seite $(z + 5)$ Mann, nämlich 5 Mann mehr enthält als die Seite des gleichseitigen Dreiecks. Hiernach besteht die Gleichung:

Erkl 21. Stehen in einer Seite eines Quadrats $(z + 5)$ Mann, so stehen in dem ganzen Quadrate $(z + 5)(z + 5) = (z + 5)^2$; denn das ganze Quadrat enthält $(z + 5)$ Reihen und in jeder Reihe stehen $(z + 5)$ Mann.

2) . . $\frac{z}{2}(1 + z) + \frac{z}{2}(1 + z) + 385 = (z + 5)^2$

oder: $2 \cdot \frac{z}{2}(1 + z) + 385 = (z + 5)^2$

$$z + z^2 + 385 = z^2 + 10z + 25$$

$$385 - 25 = 10z - z$$

$9z = 360$ mithin:

$\underline{z = 40.}$ Setzt man diesen Wert für z in die Gleichung 1) ein, so wird:

$$s = \frac{40}{2}(1 + 40) \text{ oder:}$$

$$s = 20 . 41$$

$$s = 820.$$

Die Stärke des Regiments ohne die Reserve ist somit = 820 Mann.

Aufgabe 18. Der Sophist *Zeno* erklärte einst, er wolle beweisen, dass *Achilles*, welcher eine Schildkröte verfolgte, die in einer Entfernung von 1 Stadium vor ihm hergeht, nicht im Stande sei dieselbe einzuholen, obgleich seine Geschwindigkeit 12 mal grösser sei als die der Schildkröte.

Er that dies folgendermassen:

Formel: $s = \frac{a}{1 - q}$ (siehe Formel 4, S. 21)

Auflösung.

Mathematisch ergibt sich die Beantwortung der in der Aufgabe gestellten Frage, wie folgt:

Angenommen, *Achilles* legt den Weg

In der Zeit, welche *Achilles* braucht, um den Vorsprung von einem Stadium zurückzulegen, kommt die Schildkröte, da ihre Geschwindigkeit 12mal kleiner als die des *Achilles* ist, nur $\frac{1}{12}$ Stadium weiter; durchläuft *Achilles* diese Strecke, so ist sie nicht mehr da, wo sie war, sondern $\frac{1}{144}$ Stadium weiter, u. s. f. Obgleich also der Zwischenraum immer kleiner wird, kann *Achilles* sie **nie** einholen! Ist dies richtig?

Erkl. 22. Stadium (lat. v. gr. Stadion) bezeichnet ein Längenmass in Griechenland und ist ca. = 185 Meter. Es war in 600 gr. Fuss eingeteilt. 6 Fuss hiessen eine Orgyia, 100 ein Plethon. 8 Stadien bildeten die spätere römische Meile.

Erkl. 23. Bei dieser Aufgabe ist es ganz gleichgültig, welche Zeit man als **Zeiteinheit** der Berechnung zu Grunde legt, da es nicht auf die **wirkliche Länge** der Zeit ankommt, sondern nur auf die Untersuchung, ob *Achilles* die Schildkröte überhaupt in einer **endlichen** (denkbaren) Zeit einholt.

Erkl. 24. Unter **Geschwindigkeit** eines Körpers versteht man den **Weg**, welchen derselbe in der **Zeiteinheit** zurücklegt (siehe: Physik, Dynamik, Lehre von der Bewegung).

Erkl. 25. Die nebenstehende Reihe ist eine **geometrische**, weil der **Quotient** je zweier aufeinanderfolgenden Glieder ein **konstanter**, nämlich $= \frac{1}{12}$ ist; sie ist eine **fallende** geometr. Reihe, weil dieser Quotient ein **ächter** Bruch ist; sie ist **unendlich**, weil die Anzahl der Glieder eine **unendliche** ist (siehe: Die geometr. Reihen).

von 1 Stadium (Erkl. 22), welchen die Schildkröte Vorsprung hat, in der **Zeiteinheit** (Erkl. 23) zurück; indessen bewegt sich die Schildkröte mit einer 12 mal **kleineren** Geschwindigkeit (Erkl. 24), legt also in **dieser** Zeiteinheit $\frac{1}{12}$ Stadium zurück. Will *Achilles* die Schildkröte einholen, so muss er auch dieses $\frac{1}{12}$ Stadium zurücklegen und hierzu braucht er $\frac{1}{12}$ der gedachten **Zeiteinheit**; während dieser Zeit in welcher *Achilles* $\frac{1}{12}$ Stadium zurücklegt, bewegt sich die Schildkröte (da ihre Geschwindigkeit 12 mal kleiner als die des *Achilles* ist) $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12^2}$ Stadium weiter. Um diese $\frac{1}{12^2}$ Stadium zu durchlaufen, braucht *Achilles* $\frac{1}{12^2}$ Zeit**einheiten**, während dieser Zeit bewegt sich aber die Schildkröte (da ihre Geschwindigkeit 12 mal kleiner als die des *Achilles* ist) $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12^3}$ Stadien weiter; hierzu braucht *Achilles* $\frac{1}{12^3}$ Zeit**einheiten**, u. s. f.

Bezeichnet man nun den Weg, welchen *Achilles* bis zum **Einholen** der Schildkröte zurückzulegen hat, in **Stadien** ausgedrückt, mit s, so besteht die Gleichung:

$$1) \ldots \quad s = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots \text{ in } \textit{infinitum}$$

In dieser Gleichung ersieht man sofort, dass die Glieder auf der rechten Seite eine **fallende, unendliche geometrische** Reihe bilden (Erkl. 25).

Von dieser Reihe kennt man:

das Anfangsglied $a = 1$

den Quotient $q = \frac{1}{12}$ (ein ächter Bruch)

und die Anzahl d. Glieder $n = \infty$ (unendlich).

Das summatorische Glied s dieser Reihe findet man somit nach vorstehender Formel:

$$s = \frac{a}{1-q} \quad \text{(siehe: Die geometr. Reihen, Formel 4, Seite 21),}$$

wenn man für $a = 1$, für $q = \frac{1}{12}$ setzt, mit:

$$s = \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{12}{12-1} = \frac{12}{11} \quad \text{oder:}$$

$s = 1\frac{1}{11}$ Stadien. *Achilles* holt also, nachdem er $1\frac{1}{11}$ Stadien zurückgelegt hat, die Schildkröte ein.

Nach der Annahme braucht *Achilles* zum Durchlaufen von 1 Stadium die **Zeiteinheit**, mithin braucht er für die $1\frac{1}{11}$ Stadien $1\frac{1}{11}$ **Zeiteinheiten**; er holt somit in der **endlichen** Zeit von $1\frac{1}{11}$ der gedachten **Zeiteinheiten** die Schildkröte ein.

Der Beweis des *Zeno*, dass *Achilles* die Schildkröte **nie** einholen könne, ist somit ein **Trugschluss**, bekannt unter dem Namen:

„**Das Sophisma oder Paradoxon des Zeno**".

Mit diesem Trugschluss wollte *Zeno* die Irrealität der materiellen Welt nachweisen. Der Trugschluss beruhte darin, dass *Zeno* die einzelnen Wegstrecken (Abschnitte) bei dem Wettlauf immer kleiner und kleiner (unendlich klein) werden liess, die **Zeiten** aber, welche *Achilles* zum Durchlaufen der **einzelnen** immer kleineren Wegstrecken brauchte, **unberücksichtigt** liess, und nicht dabei beachtete, dass auch **diese Zeiten** immer kleiner und kleiner — bis schliesslich **unendlich klein** $(= 0)$ — werden müssen.

Aufgabe 19. Nach einem Gesetze der Physik legt ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper während der ersten Sekunde 4,905 m **weniger** zurück, als er zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft nicht auf denselben einwirkte, in jeder folgenden Sekunde aber 9,81 m weniger als in der vorhergehenden. Wenn nun ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit (Erkl. 26) von 147,15 m senkrecht in die Höhe geworfen wird, wie lange und wie hoch wird er steigen und nach wieviel Sekunden wieder den Boden erreichen?

Erkl. 26. Unter der **anfänglichen Geschwindigkeit** oder **Anfangsgeschwindigkeit** eines Körpers versteht man den Weg, welchen ein Körper **pro Sekunde**, bezw. in der **ersten Sekunde** (wenn keine andere Zeiteinheit ausdrücklich benannt ist) zurücklegt.

Formeln:

1) $n = \frac{t-a}{d} + 1$ (siehe Gleich. 17, Seite 12)

2) $s = \frac{t-a+d}{2d}(a+t)$ (siehe Gleich. 10, Seite 10)

3) $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$

(siehe Gleich. 18, Seite 13)

Auflösung.

Nach der Aufgabe legt der senkrecht in die Höhe geworfene Körper:

in der 1. Sek. $(147{,}15 - 4{,}905)$ m,
„ „ 2. „ $((147{,}15 - 4{,}905) - 9{,}81)$ m,
„ „ 3. „ $((147{,}15 - 4{,}905) - 2 . 9{,}81)$ m,
„ „ 4. „ $((147{,}15 - 4{,}905) - 3 . 9{,}81)$ m etc.

und nach Erkl. 27 in der **letzten** oder n^{ten} Sekunde: 4,905 m zurück.

Bei Betrachtung dieser Wege (Steigräume), welche der Körper in den einzelnen Sekunden zurücklegt, findet man, dass dieselben in ihrer Aufeinanderfolge eine **arithmetische** Reihe bilden, weil die **Differenz** je zweier aufeinanderfolgenden Steigräume eine **konstante** Grösse, nämlich $= -9{,}81$ ist.

Erkl. 27. Am **Ende** der **letzten** Sekunde muss die Geschwindigkeit des senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers = **Null** werden.

Der Körper legt sonach während der **letzten** Sekunde (die Sekunde ist bei der Beobachtung ein sehr **kleines** Zeitteilchen) gerade noch **denselben** Weg zurück, welcher durch die Anziehungskraft der Erde **während einer** Sekunde verzögert wird, und dieser ist nach der Aufgabe (für das mittl. Europa $= \frac{9,81}{2}) = 4,905$ m (siehe: Physik, bezw. Mechanik, Bewegung fester Körper — gleichförmig verzögerte Bewegung).

Anmerkung 3. Setzt man in der Gleichung:

$$n = \frac{147,15}{9,81}$$

die **Anzahl** n der Sekunden $= t_{,}$, die anfängliche Geschwindigkeit $147,15 = a$ und die Grösse 9,81, d. i. die Anziehungskraft der Erde (Schwere, *gravitas*, des Körpers) $= g$, so erhält man die aus der Physik bekannte Formel:

Formel II . . . $t_{,} = \frac{a}{g}$ Diese Formel drückt die Beziehung zwischen der Zeit $t_{,}$, der Anfangsgeschwindigkeit a und der Acceleration g der Erde, eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers aus (siehe: Physik, bezw. Mechanik, Die Bewegung fester Körper — gleichförmig verzögerte Bewegung).

Anmerkung 4. Benutzt man zur Bestimmung des summatorischen Gliedes s der gedachten arithmetischen Reihe, die Formel:

$$s = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$ (siehe Gleichung 9, Seite 10)

und setzt für die Anzahl n der Glieder der Reihe, bezw. für die Anzahl der Sekunden, welche der Körper steigt $= t_{,}$, für das Anfangsglied $a = (a - \frac{g}{2})$, d. i. die Anfangsgeschwindigkeit: 147,15 weniger 4,905 und für $d = -9,81 = -g$, so erhält man:

$$s = \frac{t_{,}}{2}\left(2(a - \frac{g}{2}) + (t_{,} - 1) \cdot -g\right) \text{ oder:}$$

$$s = \frac{t_{,}}{2}(2a - g - t_{,}g + g) \text{ und dies liefert}$$

eine weitere aus der Physik bekannte Formel, nämlich:

Formel III.: $s = at_{,} - \frac{1}{2}gt_{,}^2$ Diese Formel drückt die Beziehung zwischen dem Weg s, der Zeit t, und der Acceleration g der Erde, eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers aus (siehe Physik, bezw. Mechanik: Die Bewegung fester Körper — gleichförmig verzögerte Bewegung).

Von dieser arithm. Reihe kennt man:

das Anfangsglied $a = (147,15 - 4,905)$
die Differenz $d = -9,81$
das letzte Glied $t = 4,905$

Mit Hülfe dieser drei Bestimmungsstücke, kann man die Anzahl n der Glieder (Steigräume) das ist zugleich die **gesuchte** Anzahl der Sekunden, welche angibt **wie lange** der Körper steigt, nach der vorstehenden Formel:

$$n = \frac{t-a}{d} + 1$$ (siehe Gleich. 17, Seite 12)

bestimmen. In diese Formel, für t, a und d die vorstehenden Werte substituiert, gibt:

$$n = \frac{4,905 - (147,15 - 4,905)}{-9,81} + 1 \text{ oder:}$$

$$n = \frac{4,905 - 147,15 + 4,905}{-9,81} + 1$$

$$n = \frac{9,81 - 147,15}{-9,81} + \frac{-9,81}{-9,81}$$

$$n = \frac{9,81 - 147,15 - 9,81}{-9,81} = \frac{-147,15}{-9,81}$$

$$n = \frac{147,15}{9,81}$$ (Anmerkung 3)

hieraus erhält man:

$$n = 15.$$

D e r K ö r p e r s t e i g t s o m i t **15 Sekunden.**

Will man ferner berechnen, **wie hoch** der Körper steigt, so hat man nur die einzelnen Steigräume zu addieren, bezw. das summatorische Glied s der gedachten **arithmetischen** Reihe zu bestimmen. Dies kann man **unabhängig** von der bereits gefundenen Grösse: $n = 15$, nach der Formel:

$$s = \frac{t - a + d}{2d}(a + t)$$ (siehe Gleichung 10, Seite 10)

wenn man in dieselbe die für a, t und d festgestellten Werte einsetzt. Man erhält hiernach:

$$s = \frac{4,905 - (147,15 - 4,905) - 9,81}{-2 \cdot 9,81} \cdot (147,15 - 4,905 + 4,905)$$

oder:

$$s = \frac{-147,15 + 9,81 - 9,81}{-2 \cdot 9,81} \cdot 147,15$$

$$s = \frac{-147,15}{-19,62} \cdot 147,15 = \frac{147,15}{19,62} \cdot 147,15$$

$$s = \frac{147,15^2}{19,62}$$ Dies logarithmiert, gibt:

Anmerkung 5. Aus der Formel 1:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \text{ in Anmerkung 2, Seite 49,}$$

erhält man für die Zeit t, welche der fallende Körper braucht:

$$\textbf{Formel IV} \ldots t = \sqrt{\frac{2 \,.\, s}{g}}$$

Aus den Formeln II und III, nämlich:

$$t_{,} = \frac{a}{g} \text{ (siehe Anmerkung 3, Seite 55) und}$$

$$s = a t_{,} - \frac{1}{2} g t_{,}^2 \text{ (siehe Anm. 4, Seite 55)}$$

erhält man durch Elimination der Grösse a:

$$s = g t_{,} \,.\, t_{,} - \frac{1}{2} g t_{,}^2 \text{ oder:}$$

$$s = g \,.\, t_{,}^2 - \frac{g \,.\, t_{,}^2}{2} = \frac{g \,.\, t_{,}^2}{2}$$

und schliesslich:

$$\textbf{Formel V} \ldots t_{,} = \sqrt{\frac{2 \,.\, s}{g}}$$

Aus den Formeln IV und V ersieht man, dass die Zeiten t und $t_{,}$ des Steigens und des Fallens eines und desselben Körpers **gleich sind.** (Vergl. Physik, bezw. Mechanik, Bewegung fester Körper — gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung.)

Erkl. 28. Der Wert eines Bruches, dessen Zähler = 0, ist gleich Null; in Zeichen:

$$\frac{0}{a} = 0; \text{ denn: } a \,.\, 0 = 0.$$

$$\log s = 2 \,.\, \log 147{,}15 - \log 19{,}62$$

Nun ist: $\log 147{,}15 = 2{,}1677603$

$$\begin{array}{rr} & .\,2 \\ \hline & 4{,}3355206 \\ -\log 19{,}62 = & -\,1{,}2926990 \\ \hline \log s = & 3{,}0428216 \\ & 8117 \\ \hline & 99 \\ & 78{,}6 \\ \hline & 20{,}4 \end{array}$$

mithin:

$$s = 1103{,}62$$

Der Körper hat somit einen Steigraum von 1103,62 m zurückgelegt. (Vergl. Anm. 4)

Will man schliesslich berechnen, **wieviel** Sekunden der Körper braucht bis er wieder zur Erde gelangt, so beachte man, dass — wie in der Aufgabe 15, Seite 49 — der Körper in der ersten Sekunde 4,905 m, in jeder folgenden Sekunde aber immer um das doppelte dieser Zahl **mehr als** in der nächstvorhergehenden durchfällt und dass der ganze Fallraum des Körpers gleich dem vorhin gefundenen Steigraum: $s = 1103{,}62$ m sein muss.

Die Fallräume in den einzelnen Sekunden bilden, analog der Auflösung der Aufgabe 15, in ihrer Aufeinanderfolge die **arithmetische** Reihe:

$$4{,}905,\ (4{,}905 + 9{,}81),\ (4{,}905 + 2 \,.\, 9{,}81) \text{ u. s. f.}$$

Von dieser arithm. Reihe kennt man:
das Anfangsglied $a = 4{,}905$
die Differenz $d = 9{,}81$ und
die Summe aller Glieder,
d. i. der ganze Fallraum $s = 1103{,}62$ m.

Die Anzahl aller Glieder der Reihe, d. i. die Anzahl der einzelnen Fallräume, bezw. die Anzahl n der Sekunden, welche angibt **wie lange** der Körper **fällt**, ist gesucht.

Mit Hülfe vorstehender Formel:

$$n = -\frac{2a - d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$$

(siehe Gleichung 18, Seite 13)

erhält man hiernach:

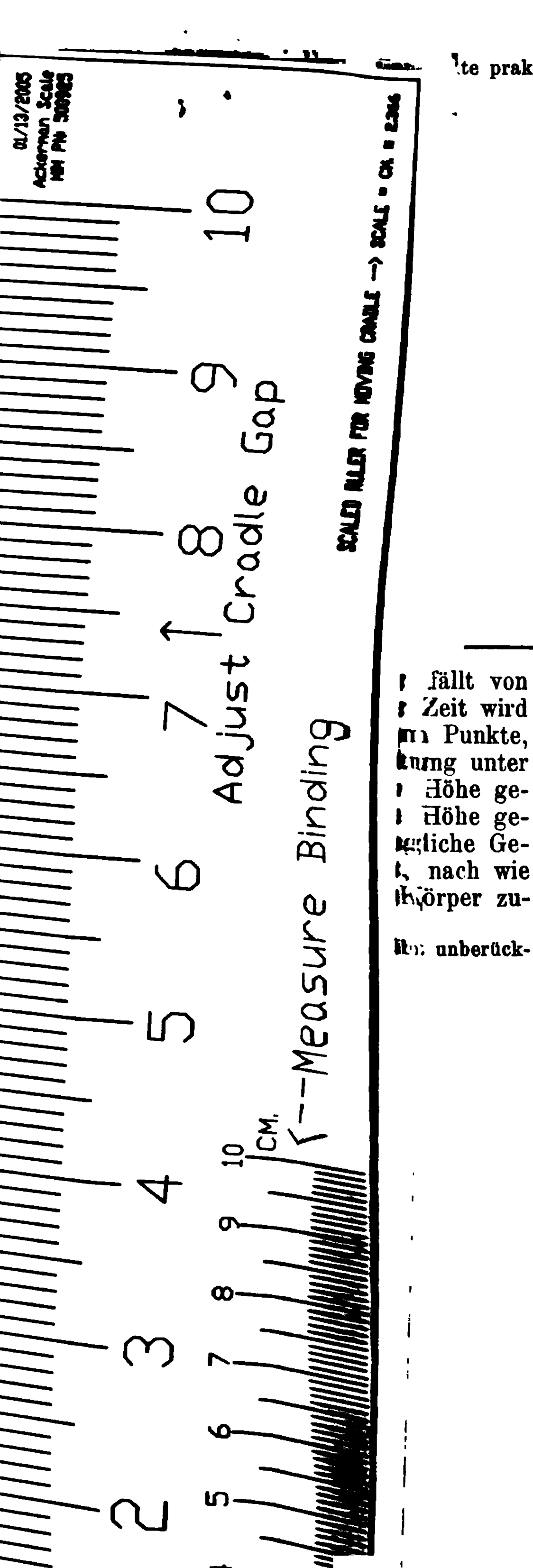
$$n = -\frac{2 \,.\, 4{,}905 - 9{,}81}{2 \,.\, 9{,}81} \pm \sqrt{\frac{2 \,.\, 1103{,}62}{9{,}81} + \left(\frac{2 \,.\, 4{,}905 - 9{,}81}{2 \,.\, 9{,}81}\right)^2}$$

oder:

$$n = -\frac{0}{2 \,.\, 9{,}81} \pm \sqrt{\frac{2207{,}24}{9{,}81} + \left(\frac{0}{2 \,.\, 9{,}81}\right)^2} \text{ (Erkl. 28)}$$

$$n = \pm \sqrt{\frac{2207{,}24}{9{,}81}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:



$$\log n = \frac{1}{2}\,[\log 2207{,}24 - \log 9{,}81]$$

Nun ist: $\log 2207{,}24 = 3{,}3438417$

$$\begin{array}{rr} & 3{,}3438417 \\ & +\ 79 \\ \hline & 3{,}3438496 \\ -\log 9{,}81 = & -\ 0{,}9916690 \\ \hline & 2{,}3521806 \\ & \cdot \frac{1}{2} \\ \hline \log n = & 1{,}1760903 \\ & 0913 \end{array}$$

mithin: $n = 15$.

Der Körper braucht hiernach auch 15 Sekunden, um von seinem höchsten Punkte wieder zur Erde zu gelangen.

Bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper sind somit **die Zeiten des Steigens und Fallens einander gleich.** (Vergl. Anmerkung 5.)

Formel: $s = \frac{n}{2}\,(2a + (n-1)\,d)$

(siehe Gleichung 9, Seite 10)

Auflösung.

Der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht darin, dass bis zum Begegnen der beiden Körper die Summe: $s + s_,$ der Wege, welche beide Körper zurücklegen, gleich deren ursprünglichen Entfernung von 1000 m ist.

Man hat somit die Gleichung:

1). . . . . $s + s_, = 1000$

Der Weg s, welchen der **fallende** Körper zurücklegt, besteht aus der Summe der Fallräume, welche dieser Körper in den einzelnen Sekunden durcheilt.

Nach der Aufgabe 15, Seite 49, bilden diese Fallräume in ihrer Aufeinanderfolge eine **arithmetische** Reihe, von welcher man kennt:

das Anfangsglied $a = 4{,}905$ (das ist der Weg, welchen der Körper in der 1. Sekunde zurücklegt) und

die Differenz $d = 9{,}81$ (das ist die **Beschleunigung**, welche der fallende Körper pro Sekunde erhält).

Die Anzahl $n = x$ der Glieder der Reihe, d. i. die Anzahl der Fallräume, bezw. die Anzahl der Sekunden, welche

Anmerkung 6. Nach der Formel I in Anmerkung 2, Seite 49, hat man für den **fallenden Körper**:

1) . . . . . $s = \frac{1}{2} g t^2$

Nach der Formel III in Anmerkung 4, S. 55, hat man für den **steigenden** Körper, da $t = t$, ist:

2) . . . . . $s_, = at - \frac{1}{2} g t^2$

Addiert man diese Gleichungen 1) und 2), so wird:

$$s + s_, = \frac{1}{2} g t^2 + at - \frac{1}{2} g t^2$$

oder: $at = s + s_,$

Mit Rücksicht der für a und $(s + s_,)$ gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

$$300 . t = 1000$$

oder: $t = \frac{1000}{300} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Auflösung (siehe Physik, bezw. Mechanik, Bewegung fester Körper — gleichförmig verzögerte und beschleunigte Bewegung).

Erkl. 29. Beide Körper beginnen ihre Bewegung zu **gleicher** Zeit, sie brauchen mithin bis zu ihrer Begegnung **gleiche Zeiten**.

angibt, **wie lange** der Körper bis zum Begegnen **fällt**, ist gesucht.

Für die Summe s aller Fallräume hat man somit nach vorstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \text{ (siehe Gleich. 9, Seite 10),}$$

die Gleichung:

2). . . $s = \frac{x}{2}(2 . 4{,}905 + (x-1)\, 9{,}81)$

Der Weg $s_,$, welchen der **steigende** Körper zurücklegt, besteht aus der Summe der Steigräume, welche dieser Körper in den einzelnen Sekunden durcheilt.

Nach der Aufgabe 19, Seite 54, bilden diese Steigräume in ihrer Aufeinanderfolge eine **arithmetische** Reihe, von welcher man kennt:

das Anfangsglied $a = (300 - 4{,}908)$ das ist der Weg, welchen der Körper in der 1. Sekunde zurücklegt) und

die Differenz $d = -9{,}81$ (d. i. die **Verzögerung**, welche der Körper in **jeder** Sekunde erleidet).

Die Anzahl $n = x$ der Glieder dieser Reihe, d. i. die Anzahl der Steigräume, bezw. die Anzahl der Sekunden, welche angibt, **wie lange** der Körper bis zum Begegnen **steigt** und welche nach Erkl. 29, **gleich** der Anzahl der Sekunden ist, die angibt, wie lange der andere Körper indessen fällt, ist gesucht.

Für die Summe $s_,$ aller der Steigräume hat man somit nach vorstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2}(2 . a + (n-1) d)$$

(siehe Gleichung 9, Seite 10)

die Gleichung:

3) . . . $s_, = \frac{x}{2}(2 . (300 - 4{,}905) + (x-1) \cdot -9{,}81)$

Setzt man nunmehr die für s und $s_,$ gefundenen Werte in Gleichung 1) ein, so erhält man:

4) . . . $\frac{x}{2}(2 . 4{,}905 + (x-1)\, 9{,}81) + \frac{x}{2}(2 . (300 - 4{,}905) + (x-1) \cdot -9{,}81) = 1000$

oder: $\frac{x}{2}[9{,}81 + 9{,}81x - 9{,}81 + 600 - 9{,}81 - 9{,}81x + 9{,}81] = 1000$

$$\frac{x}{2} \cdot 600 = 1000$$

$$300x = 1000 \quad \text{(vergl. Anm. 6)}$$

$$x = \frac{1000}{300} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Die beiden Körper werden also nach $3\frac{1}{3}$ Sekunden zusammentreffen.

Aufgabe 21. Nach den neuesten Untersuchungen über die Eigenwärme der Erde, nimmt die Wärme der Erde um so mehr zu, je mehr man sich ihrem Mittelpunkte nähert. Wenn nun an der Oberfläche der Erde die Temperatur 10° Celsius beträgt, und für je 32 m, die man sich dem Mittelpunkte der Erde nähert, die Temperaturerhöhung 1° Celsius ausmacht, bei welcher Tiefe wird man die Wärme des kochenden Wassers = 100° C., bei welcher die Hitze des schmelzenden Bleies = 334° Celsius antreffen?

Erkl. 30. Vergleiche die Teile der Physik, welche über die Wärme (Ausgleichung derselben) handeln.

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

Auflösung.

Da auf der Oberfläche der Erde die Temperatur = 10° Celsius angenommen wurde, also auch das Wasser etc. diese Temperatur 10° auf der Oberfläche hat (Erkl. 30), so fehlen dem Wasser bis zu seinem Siedepunkt (100° C.) noch 90°. Geht man nun 32 m tief in die Erde, so erhöht sich die Temperatur um 1°, geht man wieder 32 m tiefer, so erhöht sich die Temperatur wieder um 1°, u. s. f.

Für die gesuchte Tiefe s, bei welcher das Wasser kochend (= 100°) angetroffen wird, hat man somit die Gleichung:

$$1) \ldots \; s = \overset{\text{1. Gl.}}{32} + \overset{\text{2. Gl.}}{32} + \overset{\text{3. Gl.}}{32} + \ldots\ldots + \overset{\text{90. Gl.}}{32}$$

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, bilden eine **arithmetische** Progression, weil die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder **konstant**, nämlich = 0 ist.

Von dieser arithm. Reihe kennt man:

das Anfangsglied $a = 32$
das Endglied $t = 32$
die Anzahl aller Glieder $n = 90$

Mit Hülfe vorstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a + t) \quad \text{(siehe Formel 2, Seite 5)}$$

erhält man hiernach die Gleichung:

$$2) \ldots \; s = \frac{90}{2}(32 + 32) \quad \text{oder:}$$

$$s = \frac{90}{2} \cdot 64 = 90 \cdot 32$$

$$s = 2880.$$

Somit findet man bei einer Tiefe von 2880 m die Temperatur des kochenden Wassers.

Dem Blei fehlen bis zu seinem Schmelzpunkt $334 - 10 = 324^\circ$.

Die Tiefe $s_,$ für die Temperatur des schmelzenden Bleies, findet man — analog wie die des kochenden Wassers nach Gleichung 2) — mit:

$$s_, = \frac{324}{2}(32 + 32) = 324 \cdot 32$$

oder: $\underline{s_, = 10368 \text{m}}$

Aufgabe 22. Ein Schiff mit 175 Passagieren hatte hinreichendes Wasser für die Reise. Nach 30 Tagen wurden in Folge des Scorbuts täglich 3 Personen hinweggerafft. Ein Sturm verzögerte die Fahrt um 3 Wochen. Das Schiff erreichte den Hafen, ohne dass das Wasser ausgegangen war. Wie lange dauerte die Fahrt des Schiffes?

Formel: $s = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$

(siehe Gleichung 9, Seite 10)

Auflösung.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe muss angenommen werden, weil gesagt ist: das Schiff hatte **hinreichendes** Wasser, dass j e d e r Passagier j e d e n Tag **dasselbe** Quantum Wasser erhielt und dass das Wasser bis zur Ankunft des Schiffes **gerade** ausreichte, also auch nichts **übrig** blieb (da in der Aufgabe nur gesagt ist, dass das Wasser **nicht ausgegangen** ist, nicht aber, dass noch Wasser **übrig** geblieben ist).

Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich folgendermassen:

Nimmt man an, die **ganze** Fahrt — incl. der Verspätung (3 Wochen = 21 Tage) — habe x Tage gedauert und das ganze vorräthige Wasserquantum sei = 1 (irgend welche Einheit), so war für die Dauer der **voraussichtlichen** Fahrt von: $(x - 21)$ Tagen auf 175 Personen das Wasserquantum 1 vorgesehen, mithin kam auf 1 Person während **einem** Tage:

$$\frac{1}{175(x - 21)} \text{ Wassereinheiten}$$

und dies ist das Wasserquantum, welches j e d e Person in j e d e m Tage während der **ganzen** Dauer der Fahrt — der Annahme gemäss — erhält.

Erklärung 31.

1 Person verbraucht in 1 Tage: $\frac{1}{175(x-21)}$

175 „ verbrauchen „ 1 „ $\frac{1 \cdot 175}{175(x-21)}$

und

175 Pers. verbrauchen in 30 Tagen: $\frac{175 \cdot 30}{175(x-21)}$

In dem Zeitraum der ersten 30 Tage verbrauchten nach Erkl. 31 somit die 175 Passagiere:

$\frac{1 \cdot 175 \cdot 30}{175(x-21)}$ oder: $= \frac{30}{(x-21)}$ des ganzen Wassers; für den Rest $(x-30)$ Tage der Fahrt verblieb somit:

$1 - \frac{30}{x-21}$ oder: $= \frac{x-21-30}{x-21} = \frac{x-51}{x-21}$

des Wassers zum Verbrauche.

Nun starben am folgenden (31.) Tage 3 Personen an Scorbut, es wurden somit an diesem Tage nur:

$\frac{172}{175(x-21)}$ des Wassers verbraucht.

An dem nächstfolgenden Tage verstarben abermals drei Personen, an diesem Tage wurde somit nur:

$\frac{172}{175(x-21)} - \frac{3}{175(x-21)}$ des Wassers verbraucht.

An dem darauf folgenden Tage starben wiederum drei Personen, an diesem Tage wurden sonach nur:

$\frac{172}{175(x-21)} - 2 \cdot \frac{3}{175(x-21)}$ des Wassers verbraucht u. s. f.

Die Wassermenge: $\frac{x-51}{x-21}$, welche nach den ersten 30 Tagen übrig blieb, muss nach der Annahme gleich den Wassermengen sein, welche in den folgenden Tagen bis zur Einfahrt in den Hafen verbraucht wurden. Es besteht somit die Gleichung:

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{172}{175(x-21)} + \left(\frac{172}{175(x-21)} - \frac{3}{175(x-21)}\right) + \left(\frac{172}{175(x-21)} - 2 \cdot \frac{3}{175(x-21)}\right) + \left(\frac{172}{175(x-21)} - 3 \cdot \frac{3}{175(x-21)}\right) + \ldots\ldots$$

In dieser Gleichung ersieht man sofort, dass die Glieder auf der rechten Seite derselben eine **fallende arithmetische** Reihe bilden, weil die **Differenz** je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse, nämlich =

$\left(-\frac{3}{175(x-21)}\right)$ ist.

Von dieser arithm. Reihe kennt man:

das Anfangsglied $a = \frac{172}{175(x-21)}$

die Differenz $d = -\frac{3}{175(x-21)}$

die Summe s aller Glieder, dieselbe ist nämlich gleich der linken Seite der vorstehenden Gleichung $= \frac{x-51}{x-21}$ und

die Anzahl n der Glieder $= (x-30)$, dieselbe ist nämlich gleich der Anzahl der Tage, welche angibt, wie lange das Schiff nach den 30 Tagen überhaupt noch auf der See ist.

Zwischen den Grössen a, d, s und n, hat man nach vorstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

(siehe Gleichung 9, Seite 10)

für x die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2}\left[2\cdot\frac{172}{175(x-21)} + (x-30-1)\cdot -\frac{3}{175(x-21)}\right]$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2}\left[\frac{2.172}{175(x-21)} - \frac{3(x-31)}{175(x-21)}\right] \text{ oder:}$$

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2}\cdot\frac{344-3x+93}{175(x-21)}$$

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2}\cdot\frac{437-3x}{175(x-21)}$$

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{(x-30)(437-3x)}{350(x-21)}$$

Beiderseits mit $350.(x-21)$ multipliziert, gibt:

$$350(x-51) = (x-30)(437-3x)$$

$$350x - 350.51 = 437x - 30.437 - 3x^2 + 90x$$

$$3x^2 + 350x - 437x - 90x = 17850 - 13110$$

(siehe Hülfsrechn. 1 u. 2)

$$3x^2 - 177x = 4740$$ (siehe: Die unrein quadr. Gleichungen)

$$x^2 - \frac{177}{3}x = \frac{4740}{3}$$

$$x^2 - 59x = 1580$$

$$x^2 - 59x + \left(\frac{59}{2}\right)^2 = 1580 + \left(\frac{59}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{59}{2}\right)^2 = 1580 + \frac{59^2}{4}$$

$$x - \frac{59}{2} = \pm\sqrt{1580 + \frac{59^2}{4}}$$

$$x = \frac{59}{2} \pm \sqrt{1580 + \frac{59^2}{4}}$$

Hülfsrechnungen.

1). 350.51
```
  350
 1750
17850
```

2). 437.30
```
13110
```

3). 59.59
```
 531
295
3481
```

$$x = \frac{59}{2} \pm \sqrt{\frac{6320 + 3481}{4}}$$

Hülfsrechnung.

4). $\sqrt{98|01} = 99$

```
 81
18|1701
   1701
   ====
```

$$x = \frac{59}{2} \pm \sqrt{\frac{9801}{4}} \text{ (Hülfsrechn. 4)}$$

$$x = \frac{59}{2} \pm \frac{99}{2} \text{ mithin:}$$

$$x_{,} = \frac{158}{2} = \underline{79} \text{ und:}$$

$$x_{,,} = -\frac{40}{2} = -20$$

Die ganze Fahrt des Schiffes — incl. seiner Verspätung — dauerte somit:

79 Tage.

Der zweite für x gefundene Wert, nämlich: $x_{,,} = -20$ hat für die Lösung der Aufgabe, da er negativ ist, keinen Sinn.

Aufgabe 23. Ein Landmann säet 3 Neu-Scheffel einer besonderen Weizenart und will, ehe er von seiner Ernte zu Markte bringt, mehrere Jahre hindurch die ganze Ernte als Aussaat für das folgende Jahr benutzen, und zwar so lange, bis die Ernte ihm mindestens 30000 Neu-Scheffel einbringt.

Nach wieviel Jahren wird sein Wunsch erfüllt sein, wenn jedes Jahr die Fruchtbarkeit sich gleich bleibt und die Ernte das 6fache der Aussaat beträgt?

Erkl. 32. Ein Neu-Scheffel ist $= \frac{1}{2}$ Hektoliter $=$ 50 Liter.

Auflösung.

Säet der Landmann 3 Neu-Scheffel (Erkl. 32) Weizen, so erntet er, da die Ernte das 6fache der Aussaat beträgt, nach dem ersten Jahre: 3 . 6 Neu-Scheffel Weizen.

Diese 3 . 6 N.-Scheffel Weizen wachsen während dem zweiten Jahre an, zu:

$$3 . 6 . 6 = 3 . 6^2$$

während dem dritten Jahre, zu:

$$3 . 6^3$$

während dem vierten Jahre, zu:

$$3 . 6^4 \text{ u. s. f.}$$

Nimmt man nun an, nach dem x^{ten} Jahre würde die Ernte die gewünschten 30000 N.-Scheffel erreichen, so hat man für die Ernte nach dem x^{ten} Jahre. analog wie vorhin: $3 . 6^x$

Die jährlichen Ernten:

nach d. 1. Jahre	d. 2. Jahre	d. 3. Jahre	d. 4. Jahre		d. $x$ten Jahre
3.6,	3.6^2,	3.6^3,	3.6^4	....	3.6^x

bilden, wie leicht ersichtlich, eine **geometrische** Reihe, weil der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine **konstante** Grösse, nämlich gleich 6 ist, deren letztes Glied: 3.6^x gleich 30000 sein soll.

Man hat somit die Gleichung:

$$3.6^x = 30000 \text{ oder:}$$

$$6^x = 10000$$

Die Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x . \log 6 = \log 10000 \text{ oder:}$$

$$x = \frac{\log 10000}{\log 6}$$

$$x = \frac{4{,}0000000}{0{,}7781513}$$

Nach Hülfsrechn. 1 erhält man für x:

$$x = 5{,}14 \text{ Jahre.}$$

Da Bruchteilen von Jahren bei einer Aussaat und deren Ernte kein Wert beizumessen ist, so wird der Landmann alsdann nach 6 Jahren den gewünschten Ernteertrag von 30000 Scheffel nicht allein erreicht, sondern überholt haben (siehe Erkl. 34); er kann somit nach 6 Jahren mit dem Verkaufe beginnen.

Hülfsrechnung.

1). $\frac{4{,}0000000}{0{,}7781513} = \frac{40000000}{7781513}$

```
7781513|40000000|5,14
        38907565
        --------
        10924350
         7781513
        --------
        31428370
```

Erkl. 34. Da der Landmann nach 5,14 Jahren den gewünschten Ernteertrag erreicht, während dem Bruchteil 0,14 eines Jahres aber keine Aussaat und Ernte mehr erfolgen kann, und nach 5 ganzen Jahren den Ertrag noch nicht erreicht hat, denn nach 5 Jahren hat er den Ernteertrag:

$$3.6^5 = 3.7776 = 23328 \text{ N.-Scheffel,}$$

so muss er bis nach dem 6ten Jahre warten, nach welchem er:

$$3.6^6 = 3.46656 = 139968 \text{ N.-Scheffel}$$

Weizen erntet.

Aufgabe 24. Ein Spieler setzte bei einem Hazardspiele, jedesmal den doppelten Einsatz wenn ihm das Glück ungünstig war, dagegen nur jedesmal die Hälfte des vorhergehenden Einsatzes, wenn ihm das Glück günstig war. Zuerst verliert er achtmal, dann gewinnt er fünfmal hintereinander und zwar jedesmal das 13fache seines Einsatzes (d. h. er erhält das 12fache seines Einsatzes und den Einsatz dazu). Da er dem Glücke nicht weiter traut, so geht er mit seinem Gewinne von $949\frac{1}{2}$ ℳ nach Hause. Wieviel setzte er zum ersten Male ein?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

(siehe Formel 2, Seite 5)

Auflösung.

Angenommen, der Spieler habe zum ersten Mal x Mark gesetzt, alsdann hat er, weil ihm das Glück 8 Mal ungünstig war:

zum 2. Male: $2.x$ ℳ,
„ 3. „ $2.2.x = 2^2.x$ ℳ,
„ 4. „ $2.2^2.x = 2^3.x$ „

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Dieses Werk, welches durch sein **fortlaufendes** Erscheinen **stets auf der Höhe der Zeit steht,** kann Jedermann empfohlen werden — jedes Heft hat einen **reellen Wert** und bildet sozusagen ein abgeschlossenes Ganze. — Es wird mit den Jahren ein **mathematisch-naturwissenschaftliches Lexikon,** in welchem die **mannigfaltigsten, praktischsten Verwertungen — die Früchte der mathematischen Disciplinen** — von Stufe zu Stufe aufzufinden sind.

Der Verfasser hat somit eine **gute, brauchbare und praktische mathemathische - technische - naturwissenschaftliche - 25 - Pfennig - Bibliothek** geschaffen.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. — Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, Oktober 1881.

Die Verlagshandlung.

Inhalts-Verzeichnis.

Am Schlusse der einzelnen Hefte sind je eine Anzahl ungelöster Aufgaben angeführt. Die Auflösungen derselben sollen — analog den entsprechenden, gelösten Aufgaben — gesucht werden, wodurch bezweckt wird, dass der Studierende sich zum selbstständigen Arbeiter heranbildet. Die Lösungen dieser Aufgaben werden später in besonderen Heften zur Ausgabe gelangen.

Der Inhalt eines Heftes erleidet nur bei Raummangel eine kleine Abänderung.

Inhalt von Heft 1—20 siehe im Umschlag von Heft 25 und in dem von der Verlagshandlung zu beziehenden Prospekt.

Buchdruckerei von Hammer & Liebich in Stuttgart.

102. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Die arithmet., geometr. u. harmonischen Reihen. Forts. von Heft 26. — Seite 65—80.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt** a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die

arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 26. Seite 65—80.

Inhalt:

Gemischte praktische Aufgaben über die arithmetischen und geometrischen Reihen in vollständig gelöster Form. Auch Bewegungsaufgaben.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 35. Die Reihe:

$$x + 2x + 2^2x + 2^3x + \ldots . + 2^7x$$

ist eine **geometrische**, weil der Quotient q je zweier aufeinanderfolgenden Glieder **konstant**, bezw. $= 2$ ist.

In dieser Reihe ist:

das Anfangsglied: $a = x$
der Quotient: $q = 2$
die Anzahl der Glieder: $n = 8$

Die Summe s aller der Glieder findet man somit nach der Formel 2:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (siehe Seite 19)

aus der Gleichung:

$$s = x \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1},$$ indem sich hieraus

$$s = x \cdot \frac{256 - 1}{1} = 255x$$ ergibt.

Erkl. 36. In dem Ausdruck:

$$12 . (2^8x + 2^7x + 2^6x + 2^5x + 2^4x)$$

stellt die in der Parenthese stehende Reihe eine **geometrische Reihe** dar.

In dieser Reihe, **wenn man sie von rechts nach links liest**, ist:

das Anfangsglied: $a = 2^4x$
der Quotient: $q = 2$
die Anzahl d. Glieder: $n = 5$

Die Summe s aller der Glieder findet man somit nach der Formel 2:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (siehe Seite 19)

aus der Gleichung:

$$s = 2^4 \cdot x \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$$

indem sich hieraus:

$$s = 16x \cdot \frac{32 - 1}{1} = 16 . x . 31 = 496x$$

ergibt. Hiernach ist:

$$12 . (2^8x + \ldots . 2^4x) = 12 . 496x = 5952x$$

u. s. f., schliesslich

zum 8. Mal: $2 . 2^6 . x = 2^7x$ eingesetzt.

Somit hat der Spieler bis dahin:

$$x + 2x + 2^2x + 2^3x + \ldots . + 2^7x$$

oder nach der Erkl. 35:

$$= 255 . x$$ Mark **verloren.**

Da er zum 8. Mal abermals verloren hatte, so setzt er das 9. Mal:

$$2 . 2^7x = 2^8x$$

Nun gewinnt er zum e r s t e n m a l und zwar das 13fache seines l e t z t e n Einsatzes, nämlich:

$$13 . 2^8x$$

Zieht man hiervon seinen letzten Einsatz 2^8x ab, so ergibt sich für seinen

1. Reingewinn $= 12 . 2^8x$

Der Spieler spielt weiter, setzt aber der Aufgabe gemäss, da er jetzt gewonnen hat, das nächstemal d i e H ä l f t e seines vorigen Einsatzes, nämlich:

$\frac{2^8x}{2}$ oder 2^7x und gewinnt hierauf

$$13 . 2^7x$$

Zieht man hiervon seinen letzten Einsatz 2^7x ab, so ergibt sich für seinen

2. Reingewinn $= 12 . 2^7x$

Analog ergibt sich für seinen

3. Reingewinn $= 12 . 2^6x$

für seinen

4. Reingewinn $= 12 . 2^5x$

und für seinen

5. Reingewinn $= 12 . 2^4x$

Hier hört der Spieler auf und hat somit nach dem 8ten Spiele noch

$$12 . 2^8x + 12 . 2^7x + 12 . 2^6x + 12 . 2^5x + 12 . 2^4x$$ oder:

$$12 . (2^8x + 2^7x + 2^6x + 2^5x + 2^4x)$$

oder nach der Erkl. 36:

$$= 5952 . x$$ Mark **gewonnen.**

Subtrahiert man endlich das, was der Spieler in den ersten 8 Spielen verloren hat, nämlich $255 . x$, von dem, was er nach dem 8. Spiele noch gewonnen hat, nämlich von $5952 . x$, so erhält man seinen Gewinn, welcher ihm nach dem ganzen Spiele übrig bleibt; derselbe ist gleich $2848\frac{1}{2}$ Mark.*).

Somit besteht die Gleichung:

$$595 \,.\, 2 \,.\, x - 255x = 2848\frac{1}{2}$$

Hieraus erhält man:

$$5697x = \frac{5697}{2}$$

$$x = \frac{5697}{5697 \,.\, 2} = \frac{1}{2}$$

Der Spieler setzte also beim ersten Spiel 50 pf. (= $\frac{1}{2}$ Mark).

*). In der 1. Auflage soll es in der Aufgabe 24 statt $949\frac{1}{2}$ Mark, heissen: $2848\frac{1}{2}$ Mark.

Aufgabe 25. In einer arithmetischen Reihe von 14 Gliedern ist das Produkt des 1ten und letzten Gliedes = 276, das Produkt der beiden mittleren Glieder = 1326. Wie heisst das Anfangsglied a und die Differenz dieser Reihe d.

Formel: $t = a + (n - 1)\,d$

(siehe Formel 1, Seite 4).

Auflösung. Bezeichnet man das gesuchte Anfangsglied a der gedachten arithmetischen Reihe mit x, die gesuchte Differenz d mit y, so ist nach vorstehender Formel, da die Anzahl n der Glieder der Reihe = 14 ist, das letzte Glied $t = x + (14 - 1) \,.\, y$

Zur Berechnung der Grössen x und y besteht somit, der Aufgabe gemäss, einmal die Bestimmungsgleichung:

1). . . $x \,.\, (x + (14 - 1) \,.\, y) = 276$

Da ferner die gedachte Reihe 14 Glieder hat, so sind die beiden mittleren Glieder das 7. und das 8. Glied.

Nach Antw. der Frage 9, S. 4, ist das

7. Glied $= x + (7 - 1) \,.\, y$ und das

8. „ $= x + (8 - 1) \,.\, y$

Der Aufgabe gemäss besteht somit die weitere Bestimmungsgleichung:

2). $(x + (7 - 1) \,.\, y) \,.\, (x + (8 - 1) \,.\, y) = 1326$

Um aus den Gleichungen 1). und 2). die Grössen x und y zu berechnen, werden dieselben zunächst reduziert und man erhält:

3). . . $x^2 + 13xy = 276$

4). . . $x^2 + 13xy + 42y^2 = 1326$

Subtrahiert man nun die Gleich. 3). von der Gleich. 4)., so resultiert:

5). . . . $42y^2 = 1050$

und hieraus ergibt sich:

Erkl. 87. Aus der unrein quadratischen Gleichung:

$$x^2 \pm 65x = 276$$

findet man x, wie folgt:

$$x^2 \pm 65x + \left(\frac{65}{2}\right)^2 = 276 + \left(\frac{65}{2}\right)^2$$

$$\left(x \pm \frac{65}{2}\right)^2 = 276 + \frac{4225}{4}$$

$$x \pm \frac{65}{2} = \pm\sqrt{\frac{276 \,.\, 4 + 4225}{4}}$$

$$x = \mp\frac{65}{2} \pm\sqrt{\frac{1104 + 4225}{4}}$$

$$x = \mp\frac{65}{2} \pm\sqrt{\frac{5329}{4}}$$

$$x = \mp\frac{65}{2} \pm \frac{73}{2}$$

Da die vier Vorzeichen rechts unabhängig von einander sind, so findet man hiernach:

$$x_1 = -\frac{65}{2} + \frac{73}{2} = \frac{8}{2} = +4$$

$$x_2 = -\frac{65}{2} - \frac{73}{2} = -\frac{138}{2} = -69$$

$$x_3 = +\frac{65}{2} + \frac{73}{2} = +\frac{138}{2} = +69$$

$$x_4 = +\frac{65}{2} - \frac{73}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

6). . $y = \pm\sqrt{\frac{1050}{42}} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Setzt man diesen Wert für y in Gleichung 3). ein, so erhält man:

$$x^2 + 13x.(\pm 5) = 276 \quad \text{oder:}$$

$$x^2 \pm 65x = 276$$

Hieraus ergibt sich nach der Erkl. 37:

7). . $x = +4$, oder $= -4$, oder $= +69$, oder $= -69$

Aus den Gleichungen 6). und 7). und aus den in der Aufgabe gegebenen Bedingungen ist ersichtlich, dass das gesuchte Anfangsglied a ($= x$) der Reihe 4 Werte haben kann, dass nämlich:

$a = +4$, oder $= -4$, oder $= +69$, oder $= -69$ sein kann

und dass dementsprechend die gesuchte Differenz d ($= y$)

$= +5$, oder $= -5$, oder $= -5$, oder $= +5$ sein muss.

Aufgabe 26. Das mittlere Glied einer aus 5 Grössen bestehenden arithmetischen Progression ist x, wenn man nun weiss, dass die Summe aller Glieder $= 10$ und dass das Produkt aller Glieder $= 1440$ ist, wie heissen alsdann die 5 Glieder der Reihe?

Auflösung. Ist x das mittelste Glied der aus 5 Gliedern bestehenden Reihe und man bezeichnet mit y die Differenz d dieser gedachten arithmetischen Reihe, so kann man deren Form im allgemeinen darstellen durch:

$$(x-2y),\ (x-y),\ \underbrace{x}_{\text{mittelstes Glied}},\ (x+y),\ (x+2y)$$

Der Aufgabe gemäss bestehen somit, zur Berechnung der Grössen x und y, die Bestimmungsgleichungen:

1). $(x-2y)+(x-y)+x+(x+y)+(x+2y) = 10$

2). $(x-2y).(x-y).x.(x+y).(x+2y) = 1440$

Reduziert man die Gleichung 1)., so erhält man aus derselben:

$$5x = 10 \quad \text{oder:}$$

3). . . . $x = 2$

Setzt man diesen Wert für x in Gleichung 2). ein, so erhält man nach der Erkl. 38 für y die Werte:

Erkl. 38. Setzt man in der Gleichung:

$$(x-2y).(x-y).x.(x+y)(x+2y) = 1440$$

für $x = 2$, so geht dieselbe über in:

$$(2-2y).(2-y).2.(2+y)(2+2y) = 1440$$

Hieraus erhält man:

$$2(1-y)(2-y).2.(2+y).2.(1+y) = 1440$$

$$(1^2-y^2).(2^2-y^2) = \frac{1440}{8}$$

$$(1-y^2).(4-y^2) = 180$$

$$4-4y^2-y^2+y^4 = 180$$

$$y^4-5y^2 = 180-4$$

$$y^4-5y^2 = 176$$

Denkt man sich $y^2 = z$ gesetzt, so ist

$$y^4 = z^2$$

und man erhält:

$$z^2-5z = 176$$

$$z^2-5z+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 176+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(z-\frac{5}{2}\right)^2 = 176+\frac{25}{4}$$

$$z-\frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{176.4+25}{4}}$$

$$z = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{704+25}{4}}$$

Da nun $y^2 = z = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}}$ ist, so ergibt sich hieraus:

$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}\pm\frac{27}{2}}$$

Da die 4 Vorzeichen rechts unabhängig von einander sind, so erhält man 4 Werte für y, nämlich:

$$y_1 = +\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{27}{2}} = +\sqrt{\frac{32}{2}} = +\sqrt{16} = +4$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{27}{2}} = -\sqrt{\frac{32}{2}} = -\sqrt{16} = -4$$

$$y_3 = +\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{27}{2}} = +\sqrt{-\frac{22}{2}} = +\sqrt{-11}$$

$$y_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{27}{2}} = -\sqrt{-\frac{22}{2}} = -\sqrt{-11}$$

4). . . . $\begin{cases} y_1 = +4 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = +\sqrt{-11} \\ y_4 = -\sqrt{-11} \end{cases}$

Obige, allgemein angedeutete Reihe geht somit in Rücksicht der für x und y gefundenen Werte in die nachstehenden 4 Reihen über:

$-6, \quad -2, \quad 2, \quad 6, \quad 10$

$10, \quad 6, \quad 2, \quad -2, \quad -6$

$2-2\sqrt{-11}, \quad 2-\sqrt{-11}, \quad 2, \quad 2+\sqrt{-11}, \quad 2+2\sqrt{-11}$

$2+2\sqrt{-11}, \quad 2+\sqrt{-11}, \quad 2, \quad 2-\sqrt{-11}, \quad 2-2\sqrt{-11}$

welche je die gesuchten 5 Glieder enthalten.

Aufgabe 27. Die Summe einer aus 4 Gliedern bestehenden arithmetischen Reihe ist 16, die Summe der reziproken Werte dieser 4 Glieder ist $\frac{4}{15}$. Wie lassen sich die 4 Glieder der Reihe im allgemeinen symmetrisch ausdrücken, wenn man weiss, dass die Differenz der Reihe eine gerade Zahl ist, und welches sind die 4 Glieder der Reihe?

Erkl. 39. Bezeichnet man mit y eine beliebige gerade oder ungerade Zahl, so stellt $2y$ in allen Fällen eine **gerade Zahl** dar.

Erkl. 40. Setzt man in der Gleichung:

$$\frac{1}{x-3y}+\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+3y} = \frac{4}{15}$$

für $x = 4$, so geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{4-3y}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4+y}+\frac{1}{4+3y} = \frac{4}{15}$$

Vereinigt man zunächst die Quotienten, welche symmetrische Nenner haben, so wird:

$$\frac{4+3y+4-3y}{4^2-(3y)^2}+\frac{4+y+4-y}{4^2-y^2} = \frac{4}{15}$$

oder:

Auflösung. Bezeichnet man die unbekannte Differenz der gedachten arithmetischen Reihe, da sie eine gerade Zahl sein soll, mit: $2y$ (siehe Erkl. 39), so kann man die gedachte arithmetische Reihe im allgemeinen **symmetrisch** wie folgt ausdrücken:

$$(x-3y),\ (x-y),\ (x+y),\ (x+3y)$$

indem die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder dieser Reihe $= 2y$ ist und die vom Anfange und Ende dieser Reihe gleichweit abstehenden Glieder symmetrische Ausdrücke sind.

Zur Berechnung der unbekannten Grössen x und y bestehen somit, der Aufgabe gemäss, die Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{8}{16-9y^2}+\frac{8}{16-y^2}=\frac{4}{15}$$

Diese Gleichung durch 4 gehoben, gibt:

$$\frac{2}{16-9y^2}+\frac{2}{16-y^2}=\frac{1}{15}$$

Nunmehr mit dem Generalnenner: $(16-9y^2).(16-y^2).15$ multipliziert, gibt:

$$30(16-y^2)+30(16-9y^2)=$$
$$(16-9y^2).(16-y^2)$$

Hieraus erhält man der Reihe nach:

$$480-30y^2+480-270y^2=$$
$$256-144y^2-16y^2+9y^4$$
$$960-300y^2=256-160y^2+9y^4$$
$$704=140y^2+9y^4$$
$$y^4+\frac{140}{9}y^2=\frac{704}{9}$$

Denkt man sich: $y^2=z$, also $y^4=z^2$ gesetzt, so wird:

$$z^2+\frac{140}{9}z=\frac{704}{9}$$
$$z^2+\frac{140}{9}z+\left(\frac{140}{2.9}\right)^2=\frac{704}{9}+\left(\frac{140}{2.9}\right)^2$$
$$\left(z+\frac{70}{9}\right)^2=\frac{704}{9}+\frac{4900}{81}$$
$$z+\frac{70}{9}=\pm\sqrt{\frac{704.9+4900}{81}}$$
$$z=-\frac{70}{9}\pm\sqrt{\frac{6336+4900}{81}}$$

Da nun:

$$y^2=z=-\frac{70}{9}\pm\sqrt{\frac{11236}{81}}\text{ ist,}$$

so erhält man hieraus:

$$y=\pm\sqrt{-\frac{70}{9}\pm\frac{106}{9}}$$

In Folge der Unabhängigkeit der vier Vorzeichen: $\pm$ rechts, erhält man für y vier Werte, nämlich:

$$y_1=+\sqrt{-\frac{70}{9}+\frac{106}{9}}=+\sqrt{\frac{36}{9}}=$$
$$+\sqrt{4}=2$$
$$y_2=-\sqrt{-\frac{70}{9}+\frac{106}{9}}=-\sqrt{4}=-2$$
$$y_3=+\sqrt{-\frac{70}{9}-\frac{106}{9}}=+\sqrt{-\frac{176}{9}}=$$
$$+\sqrt{\frac{16}{9}\cdot-11}=+\frac{4}{3}\sqrt{-11}$$
$$y_4=-\sqrt{-\frac{70}{9}-\frac{106}{9}}=-\sqrt{-\frac{176}{9}}=$$
$$-\sqrt{\frac{16}{9}\cdot-11}=-\frac{4}{3}\sqrt{-11}$$

---

1). $(x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=16$

2). $\dfrac{1}{x-3y}+\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+3y}=\dfrac{4}{15}$

Reduziert man die Gleichung 1)., so erhält man aus derselben:

$$4x=16\quad\text{oder:}$$

3). . . . $x=4$

Setzt man diesen Wert für x in Gleichung 2). ein, so erhält man nach der Erkl. 40 für y die Werte:

4). . . $\begin{cases} y_1=+2\\ y_2=-2\\ y_3=\frac{4}{3}\sqrt{-11}\\ y_4=-\frac{4}{3}\sqrt{-11}\end{cases}$

Setzt man die für x und y gefundenen Werte in obige allgemein angedeutete Reihe ein, so erhält man nachstehenden vier Reihen:

$(4-3\cdot+2)$, $(4-2)$, $(4+2)$, $(4+3\cdot+2)$

$(4-3\cdot-2)$, $(4-(-2))$, $(4+(-2))$, $(4+(3\cdot-2))$

$(4-3\cdot\frac{4}{3}\sqrt{-11})$, $(4-\frac{4}{3}\sqrt{-11})$, $(4+\frac{4}{3}\sqrt{-11})$
$(4+3\cdot\frac{4}{3}\sqrt{-11})$

$(4-3\cdot-\frac{4}{3}\sqrt{-11})$, $(4-(-\frac{4}{3}\sqrt{-11}))$,
$(4+(-\frac{4}{3}\sqrt{-11}))$, $(4+(3\cdot-\frac{4}{3}\sqrt{-11}))$

Die gesuchten 4 Glieder der Reihe sind somit:

$-2,\quad 2,\quad 6,\quad 10$ oder:

$10,\quad 6,\quad 2,\quad -2$ oder:

$4(1-\sqrt{-11})$, $4(1-\frac{1}{3}\sqrt{-11})$, $4(1+\frac{1}{3}\sqrt{-11})$,
$4(1+\sqrt{-11})$ oder:

$4(1+\sqrt{-11})$, $4(1+\frac{1}{3}\sqrt{-11})$, $4(1-\frac{1}{3}\sqrt{-11})$,
$4(1-\sqrt{-11})$

Aufgabe 28. Zwei arithmetische Reihen haben gleiche Anfangsglieder; von der 1ten Reihe kennt man das letzte Glied $t = 39$, sowie die Summe s aller Glieder $= 207$, und von der 2ten Reihe kennt man das letzte Glied $t_1 = 124$ und auch die Summe s_1 aller Glieder $= 917$. Wie gross ist in beiden Reihen die Anzahl der Glieder?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

(siehe Formel 2, Seite 5)

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Glieder der 1. Reihe mit x, die der 2. Reihe mit y und das beiden Reihen gleiche Anfangsglied mit z, so bestehen zur Berechnung der unbekannten Grössen x, y und z nach vorstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$

die Bestimmungsgleichungen:

1). . . . $207 = \frac{x}{2}(z + 39)$

2). . . . $917 = \frac{y}{2}(z + 124)$

Da man hiernach 2 Gleichungen mit drei Unbekannten hat, so führt die Lösung der Aufgabe auf die Lösung einer unbestimmten, sogenannten diophantischen Gleichung mit mehreren Unbekannten (siehe Erkl. 41), dementsprechend verfahre man, wie folgt:

Nach dem unbekannten Anfangsglied z ist in der Aufgabe nicht gefragt, somit eliminiere man z aus diesen Gleichungen. Aus Gleichung 1). ergibt sich:

3). . . . $z = \frac{2 \cdot 207}{x} - 39$

und aus Gleichung 2). ergibt sich:

4). . . . $z = \frac{2 \cdot 917}{y} - 124$

somit erhält man aus den Gleichungen 3). und 4). die unbestimmte rektanguläre (siehe Erkl. 42 u. 43) Gleichung:

5). $\frac{2 \cdot 207}{x} - 39 = \frac{2 \cdot 917}{y} - 124$

Hieraus lässt sich nun für jeden beliebig gewählten Wert von y ein zugehöriger Wert für x finden. Nun muss man aber beachten, dass x und y die Anzahl der Glieder der gesuchten Reihen vorstellen, somit weder negative noch gebrochene Zahlen sein kön-

Erkl. 41. In Betreff des Begriffs und der Auflösung der unbestimmten, sog. diophantischen Gleichungen siehe man das Kapitel, welches hierüber handelt.

Erkl. 42. Eine Gleichung in welcher ausser den Vielfachen der Unbekannten auch noch Produkte derselben vorkommen, nennt man rektanguläre oder zusammengesetzte Gleichungen.

z. B. die Gleichung:

$$\frac{2 \cdot 207}{x} - 39 = \frac{2 \cdot 917}{y} - 124$$

ist eine rektanguläre, denn bringt man die Unbekannten x und y aus den Nennern weg, so erhält man:

$$2 \cdot 207y - 39xy = 2 \cdot 917x - 124xy$$

nämlich eine Gleichung in welcher Produkte der Unbekannten x und y vorkommen.

Erkl. 43. Die Auflösung unbestimmter rektangulärer auch (quadratischer) Gleichungen ist oft mit grossen Schwierigkeiten verknüpft und da sich ausserdem allgemeine Lösungsmethoden nur in besonderen Fällen anwenden lassen, so ist nebenstehende unbestimmte rektanguläre Gleichung nach dem allgemeinen Prinzip, welches man der Lösung solcher Gleichungen zu Grunde legt, behandelt.

nen, sondern **positive** und **ganze** Zahlen sein müssen. Zur Bestimmung der positiven und ganzen Zahlenwerte für x und y, welche der Gleichung 5). genügen, löse man diese Gleichung nach x oder y auf; nach x aufgelöst wird man erhalten:

$$\frac{414}{x} = \frac{1834}{y} - 124 + 39$$

$$414 = \left(\frac{1834}{y} - 85\right) x$$

oder:

$$6). \quad x = \frac{414}{\frac{1834}{y} - 85}$$

Da nun die Anzahl der Glieder der gedachten Reihen, also x (und auch y) **ganze positive** Zahlen sein müssen, so muss in vorstehender Gleich. 6). der Divisor: $\frac{1834}{y} - 85$ **ein Faktor** des Dividenden 414 sein, dementsprechend hat man also für y eine solche ganze positive Zahl zu wählen, dass dies stattfindet.

Da nun, in Prim-Faktoren zerlegt, der Dividend

$$414 = 2 . 9 . 23 \text{ ist,}$$

so muss der Divisor: $\frac{1834}{y} - 85$ gleich einem oder gleich dem Produkt von zweien oder dreien dieser Faktoren sein.

Um hiernach y wählen zu können, ist zu beachten, dass der Quotient: $\frac{1834}{y}$ eine ganze positive Zahl vorstellt, welche grösser als 85 ist; soll dies aber der Fall sein, so muss y ein Faktor der Zahl 1834 sein.

Da nun, in Prim-Faktoren zerlegt:

$$1834 = 2 . 7 . 131 \text{ ist}$$

und $y =$ den Faktoren 2, 7, 131 gesetzt **nicht**, **wohl aber** $=$ dem Faktor $2 . 7 = 14$ gesetzt der Gleichung 6). genügt, so ist mit

$$y = 14$$

die Anzahl der Glieder der 2. Reihe gefunden, denn setzt man diesen Wert für y in Gleichung 6). ein, so erhält man:

$$x = \frac{414}{\frac{1834}{14} - 85} = \frac{414}{131 - 85}$$

oder:

$$x = \frac{414}{46} = 9,$$ nämlich ebenfalls eine ganze positive Zahl.

Die Anzahl der Glieder der 1. Reihe ist also $= 9$, die der 2. Reihe $= 14$.

Aufgabe 29. Unter 10 Soldaten, welche zuerst eine Bresche erstiegen haben, sollen 825 Mark verteilt werden und zwar so, dass der erste 150 Mark, jeder folgende aber immer gleichviel weniger als der vorhergehende erhält; wieviel bekommt hiernach der letzte und wieviel bekommt der zweite weniger als der erste?

Formeln:

1). $t = a + (n-1)\,d$ (siehe Formel 1, S. 4)

2). $s = \frac{n}{2}(a+t)$ („ „ 2, „ 5)

Auflösung. Die Belohnungen, welche die 10 Soldaten erhalten, bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine fallende arithmetische Reihe. Bezeichnet man die Differenz d dieser Reihe, d. i. das was jeder Soldat weniger bekommt als der nächst vorhergehende, mit x, so heisst diese Reihe:

$$150,\ 150-x,\ 150-2x,\ 150-3x, \ldots 150-9x$$

In dieser Reihe ist:

das Anfangsglied	a	$= 150$
die Differenz	d	$= -x$
das letzte Glied	t	$= 150-9x$
die Anzahl d. Glieder	n	$= 10$
die Summe	s	$= 825$

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel 2). ein, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$825 = \frac{10}{2}\Big(150 + (150-9x)\Big)$$

und hieraus ergibt sich für x, nämlich für das was jeder weniger erhält als der vorhergehende, also auch für das was der zweite weniger als der erste erhält:

$$x = 15 \text{ Mark}$$ (siehe die Erkl. 44).

Erkl. 44. Aus der Gleichung:

$$825 = \frac{10}{2}\Big(150 + (150-9x)\Big)$$

erhält man:

$$825 = 5(300-9x)$$
$$\frac{825}{5} = 300-9x$$
$$9x = 300-165$$
$$x = \frac{135}{9}$$
$$x = 15$$

Die Belohnung y, welche der 10. Soldat erhält, findet man nach vorstehender Formel 1, wenn man in derselben:

$$t = y$$
$$a = 150$$
$$n = 10$$
$$d = -x = -15$$ setzt,

mittelst der Gleichung:

$$y = 150 + (10-1)\cdot -15$$

Hieraus ergibt sich:

$$y = 150 - 9\cdot 15 = 150-135$$
$$y = 15 \text{ Mark.}$$

Aufgabe 30. Kaiser Karl V. erhielt im Jahr 1541 von der Stadt Nürnberg bei Gelegenheit seiner dortigen Anwe-

senheit einen grossen goldenen Becher mit 100 Stück Gold, von denen das kleinste einen, das nächst grössere zwei, das dritte drei Goldgulden (siehe Erkl. 45) u. s. f. wert war. Wieviel Goldgulden war der Inhalt dieses Bechers wert.

Erkl. 45. **Goldgulden** ist eine Goldmünze, welche im 14. Jahrh. von fast allen Münzstätten Deutschlands geprägt wurde. Im 17. Jahrh. wurde sie durch den **Dukaten** verdrängt.

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

(siehe Formel 2, Seite 5).

Auflösung. Die Werte der 100 Stücke Gold, welche in dem Becher enthalten waren, bilden in ihrer Aufeinanderfolge die arithmetische Reihe:

1, 2, 3, 4, ... 100

denn:

das 1te Stück Gold war 1 Goldgulden,
„ 2te „ „ „ 2 „
u. s. f., also
das 100te „ „ „ 100 „ wert.

Von dieser arithmet. Reihe kennt man:

das Anfangsglied $a = 1$
die Differenz $d = 1$
das letzte Glied $t = 100$

und ist die Summe s aller Glieder, d. i. der Wert x sämtlicher Stücke Goldes, gesucht.

Nach vorstehender Formel hat man somit die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{100}{2}(1 + 100)$$

woraus sich

$$x = 50 . 101 \quad \text{oder:}$$

$$x = 5050 \text{ Goldgulden ergibt.}$$

Aufgabe 31. Eine Tochter erhält bei ihrer Verheiratung am 1. Januar 1874 von ihren Eltern für die erste Einrichtung die Summe von 6000 Mark und hierauf am Anfang jedes folgenden Jahres die weitere Summe von 1350 Mark. Nach Ausbezahlung dieses Betrages am 1. Januar 1883 findet nun die wirkliche Verteilung des elterlichen Vermögens statt und dabei berechnet sich ihr Anteil auf 36000 Mark. Welche Summe muss der Tochter nun noch ausbezahlt werden, wenn aus den bereits empfangenen Posten die einfachen Zinsen von $4\frac{1}{2}$ % berechnet werden?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

(siehe Formel 2, Seite 5).

Auflösung. Zur Berechnung der Summe x, welche der Tochter nach der Teilung des elterlichen Nachlasses noch ausbezahlt werden muss, besteht, wenn man die Summe, welche sie in den Jahren 1874 bis 1883 erhalten hat, mit ihren einfachen Zinsen durch y bezeichnet, die Bestimmungsgleichung:

1). . . $x = 36000 - y$ Mark.

Es handelt sich hiernach zunächst darum, die Grösse y zu bestimmen und hierzu genügt folgende Betrachtung:

Erkl. 46. Ein Kapital k, welches n Jahre zu p % auf Zinsen steht, hat bei **einfacher** Zinsberechnung einen Wert K von:

1). . . . $K = k + \frac{p \cdot n \cdot k}{100}$

denn p % heisst:

100 Mark (Geldeinheiten) ergeben nach 1 Jahr p Mark Zinsen

Folglich kann man weiter sagen:

1 Mark ergibt in 1 Jahr $\frac{p}{100}$ Mark Zinsen,

1 " " " n " $\frac{p \cdot n}{100}$ " "

und

k " ergeben " n " $\frac{p \cdot n \cdot k}{100}$ " "

Da nun das Endkapital K aus dem Anfangskapital k und dessen Zinsen besteht, so hat man obige Relation:

$$K = k + \frac{p \cdot n \cdot k}{100}$$

Erkl. 47. In der arithmetischen Reihe:

$$\left(1350 + 8 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right), \left(1350 + 7 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right), \left(1350 + 6 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right), \ldots\ldots \left(1350 + 1 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right), \; 1350$$

ist:

das Anfangsglied $a = 1350 + 8 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}$

die Anzahl d. Glieder $n = 9$

das letzte Glied $t = 1350$

mithin hat man nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$

für die Summe s:

$$s = \frac{9}{2}\left(\left(1350 + 8 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right) + 1350\right)$$

oder:

$$s = \frac{9}{2}\left(2700 + 486\right) = \frac{9}{2} \cdot 3186$$

$$s = 9 \cdot 1593 = 14337$$

Die erste Summe, welche die Tochter am 1. Januar 1874 erhielt, hat nach der Erkl. 46 bis zur wirklichen Verteilung des elterlichen Nachlasses am 1. Januar 1883, also nach 9 Jahren, bei $4\frac{1}{2}$ prozentiger einfacher Zinsberechnung, einen Wert von:

a). . . . $6000 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6000}{100}$

Analog hat die 2. Summe, welche die Tochter am 1. Januar 1875 erhielt, bis zum 1. Jan. 1883, also nach 8 Jahren, einen Wert von:

b). . . . $1350 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1350}{100}$

Ebenso hat die 3., bezw. die 4., 5., ... 9. und 10. (letzte) Summe, welche die Tochter erhielt, bis zum 1. Jan. 1883 bezw. die Werte:

c). . . . $1350 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1350}{100}$

d). . . . $1350 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1350}{100}$

e). . . . $1350 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1350}{100}$

. . . .

i). . . . $1350 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1350}{100}$ und

k). . . . 1350

Durch Addition der Gleichungen a). bis k). erhält man zur Bestimmung der Grösse y, die Gleichung:

$$y = \left(6000 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6000}{100}\right) + \left(1350 + 8 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right) + \left(1350 + 7 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right) + \cdots\cdots + \left(1350 + 1 \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 1350}{100}\right) + 1350$$

Da nun auf der rechten Seite dieser Gleichung die Glieder, **vom 2ten ab,** die konstante Differenz $d = -\frac{1}{100}$ haben, mithin eine arithmetische Reihe bilden, so erhält man nach der Erkl. 47:

$$y = \left(6000 + \frac{9 \cdot 9 \cdot 6000}{2 \cdot 100}\right) + 14337$$

oder:

2). . $y = 8430 + 14337 = 22767$

Aus den Gleichungen 1). und 2). erhält man hiernach für die Summe x, welche der Tochter am 1. Januar 1883 noch ausgezahlt werden muss:

$$x = 36000 - 22767 \text{ oder:}$$
$$x = 13233 \text{ Mark.}$$

Aufgabe 32. Ein Bote A geht von einem Orte M nach einem anderen Orte N und legt den 1. Tag eine Meile, den 2. Tag 2 Meilen, den 3. Tag 3 Meilen u. s. f. zurück. — 5 Tage später geht ein anderer Bote B von demselben Orte M nach dem Orte N und macht täglich 12 Meilen. Wieviel Tage nach Abreise des ersten Boten wird derselbe von dem zweiten Boten eingeholt?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

(siehe Formel 2, Seite 5)

Erkl. 48. Die Bewegung des ersten Boten A kann man als eine Art der **gleichförmig beschleunigten** Bewegung betrachten (siehe Erkl. 56, Seite 78), indem er in jedem Zeitabschnitt (Tag) eine und dieselbe Strecke mehr zurücklegt als in dem nächst vorhergehenden Zeitabschnitt. Der zweite Bote B macht eine **gleichförmige** Bewegung, indem er in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt.

Erkl. 49. Bei den gleichförmigen Bewegungen bezeichnet man gewöhnlich den Weg mit „s“ (lat. *spatium*) und die Zeit mit „t“ (lat. *tempus*).

Erkl. 50. Die Summenreihe:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots x$$

ist eine **arithmetische** Reihe, da die Differenz d je zweier aufeinanderfolgenden Glieder **konstant**, nämlich $= 1$ ist.

In dieser Reihe ist:

das Anfangsglied $a = 1$
das Endglied $t = x$
die Anzahl der Glieder $n = x$ (nämlich gleich der gesuchten Anzahl der Tage).

Somit hat man nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$

für die Summe s obiger Reihe:

$$s = \frac{x}{2}(1 + x)$$

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Zeit, nach welcher der 1te Bote von dem 2ten eingeholt wird, muss zunächst eine Beziehung zwischen den Bewegungen (siehe Erkl. 48) der beiden Boten aufgesucht werden. Da nun beide Boten von einem und demselben Orte M ausgehen, so müssen, wenn der Bote B den Boten A überhaupt einholt, die von beiden Boten zurückgelegten Wege einander gleich sein.

Bezeichnet man den Weg, welchen der Bote A macht bis er von B eingeholt wird, mit s (siehe Erkl. 49), und den Weg, welchen der Bote B macht bis er den A einholt, mit s_1, so besteht sonach die Beziehung:

1). . . . . $s = s_1$

Um nun die Wege s und s_1 in die gegebenen Bestimmungsstücke auszudrücken, beachte man Folgendes:

Die Zeit t (siehe Erkl. 49), die der Bote A braucht bis er von dem Boten B eingeholt wird, ist gesucht, also $= x$ Tage, mithin ist die Zeit t_1, die der Bote B braucht bis er den A einholt, $= (x - 5)$ Tage, denn B geht 5 Tage später als A ab.

Da nun der Bote A am 1. Tag 1 Meile am 2. Tag 2 Meilen, am 3. Tag 3 Meilen u. s. f., also am x^{ten} Tage x Meilen zurücklegt, so ist für Weg s:

2). . . $s = 1 + 2 + 3 + \ldots x$ Meilen

oder nach der Erkl. 50:

Erkl. 51. Aus der Gleichung:

$$\frac{x}{2}(1+x) = 12(x-5)$$

erhält man:

$$x(1+x) = 24(x-5)$$

$$x+x^2 = 24x-120$$

$$x^2-23x = -120$$

$$x^2-23x+\left(\frac{23}{2}\right)^2 = -120+\left(\frac{23}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{23}{2}\right)^2 = -120+\frac{529}{4}$$

$$x-\frac{23}{2} = \pm\sqrt{\frac{-120.4+529}{4}}$$

$$x = \frac{23}{2}\pm\sqrt{\frac{-480+529}{4}}$$

$$x = \frac{23}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x = \frac{23}{2}\pm\frac{7}{2}$$

somit:

$$x_{,} = \frac{23}{2}+\frac{7}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$x_{,,} = \frac{23}{2}-\frac{7}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Erkl. 52. Unter **Geschwindigkeit** — bezeichnet durch „*v* oder *c*", vom lat. *velocitas* oder *celeritas* — versteht man den Weg, den ein Körper in der Zeiteinheit zurücklegt.

2). . . $s = \frac{x}{2}(1+x)$ Meilen

Da ferner der Bote B an jedem Tag 12 Meilen zurücklegt und bis er den A einholt $(x-5)$ Tage braucht, so ist für den Weg $s_{,}$:

3). . . $s_{,} = 12(x-5)$

Aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). ergibt sich hiermit die Bestimmungsgleichung:

4). . . $\frac{x}{2}(1+x) = 12(x-5)$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 51:

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= 15 \\ x_{,,} &= 8 \end{aligned}\right\} \text{Tage}$$

Die Lösung der Aufgabe ergibt somit für die gesuchte Anzahl x der Tage zwei Werte, nämlich 8 und 15 Tage.

Dies ist, wie folgt zu deuten:

Der Bote B holt den Boten A nach 8 Tagen ein und gewinnt in den nächsten Tagen einen Vorsprung. Dadurch nun, dass die Geschwindigkeit (siehe Erkl. 52) des A von Tag zu Tag **grösser wird**, die des B aber **dieselbe bleibt**, so wird schliesslich der Bote A den Boten B wieder einholen und zwar geschieht dies nach 15 Tagen; dann aber kann der Bote B den Boten A nicht mehr einholen, da die Geschwindigkeit des A stetig zunimmt.

Aufgabe 33. Welche Tiefe hat ein Brunnen bis zu seinem Wasserspiegel, wenn man einen Stein, den man in einem bestimmten Augenblick hineinfallen lässt, nach $4\frac{1}{2}$ Sekunden auffallen hört und wenn man berücksichtigt, dass der Schall in jeder Sekunde einen Raum von 333 m mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklegt und die Beschleunigung g der Schwere = 9,808 m ist?

Der Widerstand der Luft bleibt unberücksichtigt.

Formel: $s = \frac{n}{2}(a+t)$

(siehe Formel 2, Seite 5)

Auflösung. Zur Berechnung der Tiefe x des Brunnens beachte man, dass nach dem Gesetz des freien Falls (siehe Erkl. 53) der Stein in der 1. Sekunde =

$$\frac{g}{2} = \frac{9{,}808}{2}\text{ m}$$

in der 2. Sekunde =

$$\frac{g}{2}+g = \left(\frac{9{,}808}{2}+9{,}808\right)\text{m}$$

Erkl. 53. Nach dem Gesetz des freien Falls der Körper durchfällt im luftleeren Raum (also wenn, wie in der Aufgabe angenommen werden soll, der Widerstand der Luft unberücksichtigt bleibt) jeder Körper in der 1. Sek. $\frac{g}{2}$ Meter und in jeder folgenden Sekunde g Meter mehr als in der nächst vorhergehenden.

„g“ bedeutet die Beschleunigung der Schwere (Acceleration der Erde) und ist der Anfangsbuchstabe des lateinischen Wortes *gravitas* (die Schwere). Für das mittlere Europa beträgt $g = 9{,}808$ m, was durch Versuche festgestellt ist.

Man siehe auch die Aufgabe 15, Seite 49.

Erkl. 54. Die rechte Seite der nebenstehenden Gleichung 1). stellt, da die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant, nämlich $= 9{,}808$ ist, eine arithmet. Reihe dar.

In derselben ist:

das Anfangsglied $a = \frac{9{,}808}{2}$

das Endglied $t = \frac{9{,}808}{2} + (y-1) \cdot 9{,}808$

und die Anzahl n der Glieder $= y$ (nämlich gleich der Anzahl g der Sekunden, welche angibt, wie lange der Stein gefallen ist).

Für die Summe $s = x$ hat man somit nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a+t)$$

die Gleichung:

$$x = s = \frac{y}{2}\left[\frac{9{,}808}{2} + \left(\frac{9{,}808}{2} + (y-1) \cdot 9{,}808\right)\right]$$

woraus man erhält:

$$x = \frac{y}{2}\left[9{,}808 + y \cdot 9{,}808 - 9{,}808\right] \text{ oder:}$$

$$x = \frac{y}{2} \cdot y \cdot 9{,}808$$

$$x = 4{,}904 \cdot y^2 \text{ (man siehe nebensteh. Gleich. 2).}$$

Erkl. 55. Die Gleichung:

$$4{,}904 \cdot y^2 = \left(\frac{9}{2} - y\right) \cdot 333$$

löst man am besten, wie folgt, nach y auf:

$$4{,}904\, y^2 = \frac{9 \cdot 333}{2} - 333\, y$$

$$y^2 + \frac{333}{4{,}904}\, y = \frac{9 \cdot 333}{2 \cdot 4{,}904}$$

in der 3. Sekunde $=$

$$\frac{g}{2} + 2g = \left(\frac{9{,}808}{2} + 2 \cdot 9{,}808\right) \text{m}$$

in der 4. Sekunde $=$

$$\frac{g}{2} + 3g = \left(\frac{9{,}808}{2} + 3 \cdot 9{,}808\right) \text{m}$$

u. s. f., mithin in der letzten, in der y^{ten} Sekunde $=$

$$\frac{g}{2} + (y-1)\, g = \left(\frac{9{,}808}{2} + (y-1) \cdot 9{,}808\right) \text{m}$$

zurücklegt.

Da nun die Tiefe x des Brunnens gleich der Summe der Wege ist, welche der Stein in den einzelnen Sekunden durchfallen hat, so hat man die Gleichung:

$$1). \quad x = \frac{9{,}808}{2} + \left(\frac{9{,}808}{2} + 9{,}808\right) + \left(\frac{9{,}808}{2} + 2 \cdot 9{,}808\right) + \left(\frac{9{,}808}{2} + 3 \cdot 9{,}808\right) + \ldots \left(\frac{9{,}808}{2} + (y-1)\, 9{,}808\right)$$

in welcher y die noch unbekannte Anzahl der Sekunden bedeutet, welche angibt, wie lange der Stein gefallen ist bis er den Wasserspiegel des Brunnens erreicht hat.

Da vorstehende Gleichung 1)., welche man nach der Erkl. 54 auch in der Form:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad x = 4{,}904 \cdot y^2$$

schreiben kann, die 2 Unbekannten x und y enthält, so muss noch eine zweite Bestimmungsgleichung aufgestellt werden, wozu folgende Betrachtung genügt:

Da angenommen wurde, dass der Stein y Sekunden braucht bis er auf den Wasserspiegel des Brunnens ankommt und vom Augenblick des Fallenlassens des Steins bis zum Hören des Aufschlagens $4\frac{1}{2}$ Sekunden verfliessen, so brauchte hiernach der Schall, um denselben Weg x zurückzulegen: $(4\frac{1}{2} - y)$ Sekunden.

Da man nun weiss, dass der Schall pro Sekunde 333 m zurücklegt, so hat man die weitere Bestimmungsgleichung:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad x = (4\tfrac{1}{2} - y) \cdot 333$$

Zur Berechnung der gesuchten Grösse x könnte man nunmehr aus Gleichung 3). y in x ausdrücken, diesen Wert in Gleich. 2). substituieren und aus der somit erhaltenen Gleichung x bestimmen. Da man aber auf diesem Wege

$$y+\frac{333}{4,904}y+\left(\frac{333}{2.4,904}\right)^2=\frac{9.333}{2.4,904}+\left(\frac{333}{2.4,904}\right)^2$$

$$\left(y+\frac{333}{9,808}\right)^2=\frac{9.333}{9,808}+\frac{333^2}{9,808^2}$$

$$y+\frac{333}{9,808}=\pm\sqrt{\frac{333}{9,808}\left(9+\frac{333}{9,808}\right)}$$

$$y=-\frac{333}{9,808}\pm\sqrt{\frac{333}{9,808}\left(9+\frac{333}{9,808}\right)}$$

$$y=-33,9518\pm\sqrt{33,9518\,(9+33,9518)}$$

$$y=-33,9518\pm\sqrt{33,9518\,.\,42,9518}$$

$$y=-33,9518\pm\sqrt{1458,29092324}$$

$$y=-33,9518\pm 38,1876$$

Da nun die Anzahl der y Sekunden keine negative sein kann, so erhält man hieraus:

$$y=-33,9518+38,1876 \quad \text{oder:}$$

$$y=4,2358 \text{ Sekunden.}$$

auf eine ziemlich komplizierte Gleichung stösst, so verfahre man, wie folgt:

Aus den Gleichungen 2). und 3). ergibt sich durch Elimination der Grösse x, die neue Gleichung:

$$4). \ldots 4,904\,.\,y^2=\left(\frac{9}{2}-y\right).\,333$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 55:

$$5). \ldots y=4,2358 \text{ Sekunden.}$$

Substituiert man endlich diesen Wert für y in die Gleich. 2)., so erhält man:

$$x=4,904\,.\,(4,2358)^2 \quad \text{oder:}$$

$$x=87,9880666\ldots \text{m}$$

Die gesuchte Tiefe des Brunnens ist somit, abgerundet $= 88$ m.

Aufgabe 34. Auf der Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Punkte A und B von derselben Stelle aus, der eine rechts, der andere links herum, mit solcher Geschwindigkeit gegeneinander, dass A in **gleichförmig beschleunigter** Bewegung in der 1ten Sekunde eine Geschwindigkeit $g = 1$ Grad, in jeder folgenden g ($= 1$ Grad) mehr **erlangt**, B dagegen in **gleichförmiger** Bewegung in jeder Sekunde $v = 1$ Grad zurücklegt. Wann treffen sich beide Punkte zum 1ten Mal, wann zum 2ten Mal?

Erkl. 56. Die in dieser Aufgabe 34 erwähnte **gleichförmig beschleunigte** Bewegung des Punktes A ist nicht dieselbe wie z. B. die des Boten A in Aufgabe 32, der seine Beschleunigung von Tag zu Tag, also sprungweise erlangte, sondern es ist eine solche fortwährend gleichförmig beschleunigte Bewegung wie beim freien Falle der Körper, indem der Punkt A auch in dem kleinsten Zeitteilchen eine gewisse Beschleunigung erhält. Es ist deshalb auch in der Aufgabe z. B. gesagt: der Punkt A **erlangt** in der 1ten Sekunde eine Geschwindigkeit $g = 1$ Grad.

Unter **der Geschwindigkeit**, welche ein Körper bei einer **gleichförmig veränderten** (gleichförmig beschleunigten oder verzögerten) Bewegung in

Formel: $s = \frac{n}{2}(a+t)$

(siehe Formel 2, Seite 5).

Auflösung. Angenommen die Punkte A und B treffen zum **ersten Mal** nach x Sekunden zusammen. Während diesen x Sekunden hat der Punkt A in Folge seiner **gleichförmig beschleunigten** Bewegung (siehe Erkl. 56) auf der Peripherie des Kreises folgende Wege zurückgelegt:

in der 1. Sekunde =

$$\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2} \text{ Grad} \quad \text{(siehe Erkl. 56)}$$

in der 2. Sekunde =

$$\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}+1 \text{ Grad}$$

in der 3. Sekunde =

$$\frac{2+3}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{1}{2}+2.1 \text{ Grad}$$

in der 4. Sekunde =

$$\frac{3+4}{2}=\frac{1+6}{2}=\frac{1}{2}+3.1 \;,$$

u. s. f., also in der letzten, in der $x$ten Sekunde =

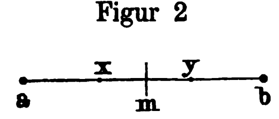
$$\frac{1}{2}+(x-1).1 \text{ Grad.}$$

einem bestimmten Augenblick erlangt hat, versteht man den Weg, welchen der Körper in der nächsten Sekunde zurücklegen würde, wenn von jenem Augenblicke an die verändernde (beschleunigende oder verzögernde) Kraft aufhörte zu wirken.

Wenn daher in der Aufgabe z. B. gesagt ist: der Punkt A erlangt in der 1ten Sekunde eine Geschwindigkeit $g = 1^0$ so heisst dies, dass er in der nächsten Sekunde 1 Bogengrad zurücklegen würde, wenn die beschleunigende Kraft am Ende der 1ten Sekunde aufhörte zu wirken. Hieraus ergibt sich, dass der Punkt A in der ersten Sekunde keinen ganzen Bogengrad zurücklegt, u. s. f.

Angenommen in der

Figur 2



stelle ab den Weg dar, welchen ein Körper (in der Aufgabe 34, welchen der Punkt A) innerhalb des Intervalls von 1 Sekunde, z. B. in der 1ten Sekunde bei gleichförmig beschleunigter Bewegung zurücklegt und es sei die Geschwindigkeit des Körpers in $a = 0$ in $b = g$. Wählt man nun auf der Strecke ab zwei beliebige Punkte x und y, welche gleichweit von der Mitte m der Strecke abstehen, und ist die Geschwindigkeit des Körpers in dem Punkte x um δ kleiner als in dem Punkte m, dann ist auch, da die Beschleunigung auch in dem kleinsten Zeitteilchen stetig stattfindet, die Geschwindigkeit des Körpers in dem Punkte y um dasselbe δ grösser als in dem Punkte m und hieraus ergibt sich, dass die Geschwindigkeit des Körpers in dem Punkte m gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Geschwindigkeiten in den beliebigen Punkten x und y, also auch gleich dem arithmetischen Mittel: $\frac{0+g}{2}$ zwischen den Geschwindigkeiten 0 und g ist, welche der Körper in den Endpunkten a und b der Strecke ab hat.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich der Schluss, dass der von dem Körper in der 1. Sekunde mit gleichmässig veränderter Geschwindigkeit durcheilte Weg gerade so gross ist, als ob der Körper sich während dieser Sekunde mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt hätte, die gleich dem **arithmetischen Mittel** aus der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit ist, die der Körper am Anfange und am Ende dieser Sekunde hat.

Der Punkt A in der Aufgabe 34 hat

am Anf.	der 1. Sek.	die Geschwindigk.	0,
„ Ende	„ 1. „	„ „	$g\ (=1)$
„ Anf.	„ 2. „	„ „	$g\ (=1)$
„ Ende	„ 2. „	„ „	$2g\ (=2.1)$

u. s. f.

Der in Bogengraden ausgedrückte Weg s des Punktes A bis zum 1. Zusammentreffen mit B wird somit durch die Gleichung:

$$1). \ldots s = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}+1\right) + \left(\frac{1}{2}+2.1\right) + \left(\frac{1}{2}+3.1\right) + \ldots\ldots \left(\frac{1}{2}+(x-1).1\right)$$

für welche man nach der Erkl. 58 auch

$$2). \ldots\ldots s = \frac{1}{2}x^2$$

setzen kann, bestimmt.

Ferner hat während den x Sekunden der Punkt B in Folge seiner **gleichförmigen** Bewegung, nach welcher er in jeder Sekunde 1 Bogengrad zurücklegt, einen Weg s_1 abgemacht, der durch die Gleichung:

$$3). \ldots\ldots s_1 = 1.x \quad \text{(siehe Erkl. 57)}$$

bestimmt ist.

Da nun die beiden nach entgegengesetzten Richtungen sich bewegenden Punkte von ein und derselben Stelle ausgehen, so muss beim 1ten Zusammentreffen der beiden Punkte die Bedingungsgleichung:

$$4). \ldots\ldots s + s_1 = 360^0$$

erfüllt werden, d. h. es muss die Summe der von den beiden Punkten zurückgelegten Wegen s und s_1 gleich dem in Bogengraden ausgedrückten Umfang des Kreises sein.

Aus den Gleichungen 2)., 3). und 4). erhält man somit zur Berechnung der Grösse die Gleichung:

$$5). \ldots \frac{1}{2}x^2 + 1.x = 360$$

woraus man:

$$x^2 + 2x = 720$$

$$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 720 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$(x+1)^2 = 721$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{721}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{721}$$

also:

$$x_1 = -1 + 26{,}85114\ldots = 25{,}85114$$

und

$$x_2 = -1 - 26{,}85114\ldots = -27{,}85114$$

erhält.

Somit legt er in der 1. Sekunde den Weg:

$$\frac{0+g}{2} = \frac{g}{2} \text{ oder } = \frac{0+1^0}{2} = \frac{1^0}{2},$$

in der 2. Sekunde den Weg:

$$\frac{g+2g}{2} = \frac{g}{2} + g \text{ oder } = \left(\frac{1}{2}+1\right)^0 \text{ u. s. f.}$$

zurück.

Man vergleiche hiermit die Aufgabe 33 und siehe das Kapitel: Die Mechanik. —

Erkl. 57. Legt ein Körper bei **gleichförmiger** Bewegung in der ersten Sekunde v Meter zurück, so legt er in 2 Sekunden $2v$ Meter u.s.f., also in t Sekunden $t.v$ Meter zurück. Sein zurückgelegter Weg s ist somit durch die Gleichung:

$$s = v.t$$

bestimmt.

Erkl. 58. Die Summenreihe:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}+2.1\right)+\left(\frac{1}{2}+3.1\right)+\ldots +\left(\frac{1}{2}+(x-1).1\right)$$

ist eine arithmetische Reihe, deren

Anfangsglied $a = \frac{1}{2}$, deren

Endglied $t = \frac{1}{2}+(x-1).1$ und deren

Gliederzahl $n = x$ ist.

Für die Summe s hat man somit nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a+t)$$

die Gleichung:

$$s = \frac{x}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+(x-1).1\right)\right]$$

oder:

$$s = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x-1\right)$$

$$s = \frac{1}{2}\cdot x^2 \text{ *)}.$$

*). Setzt man für die Beschleunigung $1 = g$, für die Zeit $x = t$, so erhält man die Formel:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$ (siehe die Anmerkung 2, S. 49).

Das 1te **Zusammentreffen** der beiden Punkte erfolgt somit nach

25,85114 Sekunden,

indem der 2te für x gefundene negative Wert für die Aufgabe unbrauchbar ist.

Nimmt man ferner an, das 2te **Zusammentreffen** erfolge nach y Sekunden, so erhält man die den Gleichungen 2). und 3). analoge Gleichungen:

6). . . . $S = \frac{1}{2}y^2$

7). . . . $S_1 = 1.y$

Zwischen diesen beiden Gleichungen besteht ferner die Beziehung:

8). . . . $S+S_1 = 2.360^0$

denn beim 2ten Zusammentreffen muss die Summe der Wege S und S_1 gleich dem in Bogengraden ausgedrückten **2fachen** Umfang des Kreises sein.

Aus den Gleichungen 6)., 7). und 8). erhält man zur Berechnung von y die weitere Gleichung:

9). . . . $\frac{1}{2}y^2+1.y = 2.360$

woraus man:

$$y^2+2y = 1440$$
$$(y+1)^2 = 1440+1^2$$
$$y = -1\pm\sqrt{1441}$$

also:

$y_1 = -1+37{,}96050 = 36{,}96050$ und

$y_2 = -1+37{,}96050 = -38{,}96050$

erhält.

Das 2te Zusammentreffen der beiden Punkte erfolgt somit nach

36,96050 Sekunden

vom Beginn der Bewegung. (Der zweite für y gefundene negative Wert ist für die Aufgabe unbrauchbar.)

Während also bis zum 1ten Zusammentreffen der Punkte 25,85114 Sekunden verstrichen sind, erfolgte das 2te Zusammentreffen viel rascher, nämlich nach:

(36,960 — 25,851), also schon nach ca. 11 Sekunden vom 1. Zusammentreffen an gerechnet. Das 3. Zusammentreffen wird in noch kürzerer Zeit erfolgen, denn die Geschwindigkeit des Punktes A wird stetig grösser, somit wird er in stets kürzeren Zeiten die Peripherie des Kreises durchlaufen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.
2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.
3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.
6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.
7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.
8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } **Rentenrechnung** als Fortsetz.
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 126. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen.

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 132. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 140. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 144. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 148. } **einer Unbekannten.** Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 154. } **gaben, gelöst durch geometr.**
„ 155. } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 157. } **gaben, gelöst durch algebr.**
} **Analysis.** (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten implizieter Funktionen.

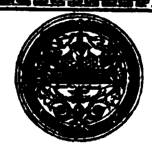
u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

106. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Forts. v. Heft 102. — Seite 81—96.
Mit 3 Figuren.



Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die

arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 102. — Seite 81—96 mit 3 Figuren.

Inhalt:

Gemischte praktische Aufgaben über die arithm. und geometr. Reihen — in vollständig gelöster Form. —

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht**, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der **mathematischen** Wissenschaften vorgeführt.

Dme **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 35. Die Seiten von 5 Quadraten bilden eine steigende arithmetische Reihe und haben zusammen eine Länge von 65 m. Die Summen der Inhalte des grössten und kleinsten Quadrats ist um 19 qm kleiner als die Summe der Inhalte der drei anderen. Wie gross sind die Seiten und die Inhalte dieser 5 Quadrate?

Erkl. 59. Hätte man, wie es dem Lernenden auch näher liegen mag, die Seite des 1ten (kleinsten) Quadrats mit x, und die Länge, um welche die Seite jedes folgenden Quadrats grösser ist als die der nächst vorhergehenden, mit y bezeichnet, so bildeten die Quadratseiten in ihrer Aufeinanderfolge die arithmet. Reihe:

$$x,\ (x+y),\ (x+2y),\ (x+3y),\ (x+4y)$$

in welcher die Glieder nicht symmetrisch sind, in Folge dessen aber, der Aufgabe gemäss, die Bestimmungsgleichungen:

a). $x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) = 19$

b). $x^2+(x+4y)^2+19 = (x+y)^2+(x+2y)^2+(x+3y)^2$

aufzulösen wären.

Diese beiden Gleichungen führen aber bei der weiteren Entwicklung offenbar zu komplizierteren Gleichungen, als die Gleichungen 1). und 2). in nebenstehender Auflösung, indem in letzteren gleiche Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen, die sich in Folge dessen tilgen, was in den obigen Gleichungen a). und b). nicht der Fall ist.

Erkl. 60. Die Gleichung:

$$(x-2y)^2+(x+2y)^2+19 = (x-y)^2+x^2+(x+y)^2$$

wird wie folgt reduziert:

Führt man die angedeuteten Quadraturen aus, so wird:

$$x^2-4xy+4y^2+x^2+4xy+4y^2+19 = x^2-2xy+y^2+x^2+x^2+2xy+y^2$$

und hieraus erhält man:

$$6y^2-x^2 = -19$$

Auflösung. Um zur Berechnung der gesuchten Grössen einfache Gleichungen zu erhalten (siehe Erkl. 59), suche man, analog wie in der Aufgabe 27, die Glieder der gedachten arithmetischen Reihe, welche die 5 Seiten der 5 Quadrate in ihrer Aufeinanderfolge bilden, **symmetrisch** auszudrücken.

Zu diesem Zwecke bezeichne man die Seite des drittgrössten Quadrats, bezw. das mittelste Glied der gedachten Reihe, mit x und die Länge, um welche die nächstgrösste Quadratseite grösser, bezw. die Länge, um welche die nächst kleinere Quadratseite kleiner ist, mit y.

In diese Unbekannten: x und y ausgedrückt, bilden die 5 Quadratseiten in ihrer Aufeinanderfolge die arithmetische Reihe:

$$(x-2y),\ (x-y),\ x,\ (x+y),\ (x+2y)$$

in welcher die Glieder symmetrisch ausgedrückt sind.

Der Aufgabe entsprechend bestehen somit zur Bestimmung der Grössen x und y, die Gleichungen:

1). $(x-2y)+(x-y)+x+(x+y)+(x+2y) = 65$

2). $(x-2y)^2+(x+2y)^2+19 = (x-y)^2+x^2+(x+y)^2$

Aus der Gleichung 1). erhält man nach gehöriger Reduktion die Gleichung:

$$5x = 65$$

woraus sich direkt:

3). . . . $x = \frac{65}{5} = 13$ ergibt.

Aus der Gleich. 2). erhält man nach gehöriger Reduktion die Gleichung:

4). . . . $6y^2-x^2 = -19$ (siehe Erkl. 60).

Setzt man hierin den mittelst Gleichung 3). gefundenen Wert für x, so erhält man:

$$6y^2-13^2 = -19 \text{ oder:}$$

$$6y^2 = 169-19$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{150}{6}} = \pm\sqrt{\frac{150.6}{6.6}} = \pm\sqrt{\frac{900}{6^2}}$$

mithin:

5). . . . $y = \pm\frac{30}{6} = \pm 5$

Wählt man: $y = +5$, **so erhält man unter Berücksichtigung des für** x **gefundenen Wertes für die Seiten der 5 Quadrate:**

3 m, 8 m, 13 m, 18 m, 23 m

Wählt man: $y = -5$, **so erhält man dieselben Werte für die gesuchten Quadratseiten, nur in der umgekehrten Ordnung:**

23 m, 18 m, 13 m, 8 m, 3 m

Die gesuchten Inhalte der 5 Quadrate sind hiernach:

3^2qm, 8^2qm, 13^2qm, 18^2qm, 23^2qm, bezw.

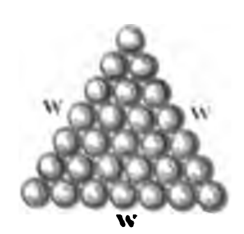
9 qm, 64 qm, 169 qm, 324 qm, 529 qm.

Aufgabe 36. Aus einer gewissen Anzahl Kugeln kann man, wie in Figur 3 angegeben ist, die Form von 2 vollen gleichseitigen und kongruenten Dreiecke bilden. Bildet man aus diesen Kugeln ein volles Quadrat, siehe Figur 4, welches in einer Seite ebensoviele Kugeln hat, als zuvor in der Seite eines jener Dreiecke enthalten waren, so bleiben 20 Kugeln übrig; wie gross war die Anzahl jener Kugeln?

Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$

(siehe Formel 2, Seite 5).

Figur 3.



Auflösung. Zur Bestimmung der gesuchten Anzahl x der Kugeln besteht der Aufgabe gemäss, wenn die Anzahl der Kugeln mittelst welchen man sich eines (siehe Fig. 3) jener gleichseitigen Dreiecke gebildet denken kann, mit y bezeichnet wird, die Gleichung:

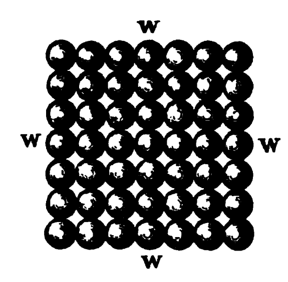
1). . . . $x = 2 . y$

Ferner besteht auch, wenn man die Anzahl der Kugeln, mittelst welchen man sich das in der Aufgabe erwähnte Quadrat gebildet denken kann (siehe Figur 4) mit z bezeichnet, die weitere Gleichung:

2). . . . $x = z + 20$

Da man hiernach 2 Gleichungen mit d r e i Unbekannten hat, so muss zur Bestimmung dieser Unbekannten noch eine weitere Gleichung aufgestellt werden und dazu benutzt man die in der Aufgabe gegebene Bedingung, dass die

Figur 4.



Erkl. 61. Die Summenreihe:

$w + (w - 1) + (w - 2) + (w - 3) + \ldots\ldots + 1$

ist eine arithmetische Reihe, deren

Anfangsglied $a = w$, deren
Endglied $t = 1$ und deren
Gliederzahl n, d. i. die Anzahl der in einem der Dreiecke aufeinanderfolgenden Kugelreihen $= w$ ist, weil diese Dreiecke gleichseitige sind, mithin jede Seite w Kugeln enthalten muss.

Für die Summe $s = y$ hat man somit nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$

die Gleichung:

$$y = \frac{w}{2}(w + 1)$$

Dreiecke gleichseitige sein sollen und dass die Seite eines derselben ebensoviele Kugeln enthalten soll, als die Seite des Quadrats.

Bezeichnet man nämlich die Anzahl der Kugeln, welche in einer Seite eines der gleichseitigen Dreiecke liegen, mit w, so enthält, siehe Fig. 3, die zweite Kugelreihe nur $(w - 1)$, die dritte nur $(w - 2)$ Kugeln u. s. f., die letzte Kugelreihe, nämlich die Spitze des Dreiecks, enthält schliesslich nur noch eine Kugel.

Für die Anzahl y der Kugeln, welche nötig sind um eines der gedachten Dreiecke zu bilden, hat man somit die Gleichung:

3). $y = w + (w - 1) + (w - 2) + (w - 3) + \ldots\ldots + 1$

oder:

4). . . . $y = \frac{w}{2}(w + 1)$ (siehe Erkl. 61)

Ferner hat man für die Anzahl z der Kugeln, welche nötig sind um das gedachte Quadrat, siehe Figur 4, bilden zu können, die Gleichung:

5). . . . $z = w^2$

Setzt man nunmehr für y und z die in w ausgedrückten Werte in die Gleichungen 1). und 2). ein, so erhält man:

6). . . $x = 2 \cdot \frac{w}{2}(w + 1)$ und

7). . . $x = w^2 + 20$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst durch Elimination der Grösse x:

$w(w + 1) = w^2 + 20$ oder:

$w^2 + w = w^2 + 20$ mithin:

a). . . $\underline{w = 20}$

d. h. in einer Seite der Dreiecke und des Quadrats liegen 20 Kugeln.

Den Wert für w in Gleich. 4). substituiert, gibt:

$y = \frac{20}{2}(20 + 1)$ oder:

$y = 10.21$ mithin:

b). . . $\underline{y = 210}$

d. h. in einem der gleichseitigen Dreiecke sind 210 Kugeln enthalten.

Setzt man endlich den Wert für y in Gleichung 1)., so erhält man:

$$x = 2.210 \quad \text{oder:}$$

c). . . $\underline{x = 420}$

d. h. die **gesuchte Anzahl** der Kugeln ist $= 420$.

Will man noch wissen, wieviel Kugeln das gedachte Quadrat enthält, so setze man den Wert für $w = 20$ in Gleichung 3). ein, wonach man:

$$z = 20^2 \quad \text{oder:}$$

d). . . $\underline{z = 400}$ erhält,

d. h. das gedachte Quadrat enthält 400 Kugeln.

Aufgabe 37. Eine Fläche von der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks, das 20 qm enthält, soll mit Draht ununterbrochen dergestalt, zuerst umzogen und dann durchzogen werden, dass die Zwischenräume 144 gleiche und gleichseitige Dreiecke sind. Wieviel Meter Draht werden dazu erfordert?

Formeln:

I. . . . $s = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)$

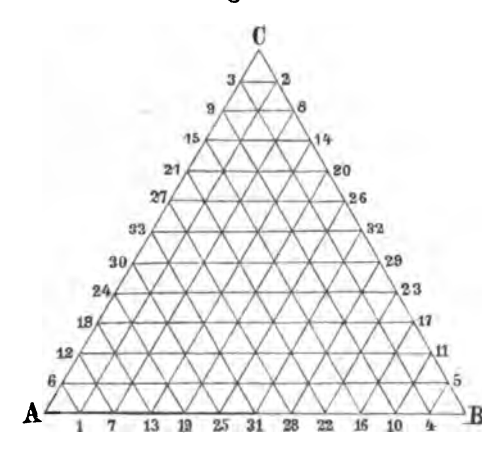
(siehe Gleichung 9, Seite 10)

II. . . . $s = \frac{n}{1}\left(a + t\right)$

(siehe Formel 2, Seite 5).

Auflösung. Um die Anzahl x der Meter Draht finden zu können, die zur Herstellung des Drahtnetzes erforderlich sind, muss zunächst untersucht werden, auf welche Weise das Netz gebildet werden kann.

Figur 5.



Denkt man sich zu diesem Zwecke in dem gegebenen Dreieck ABC, siehe Figur 5, einige der 144 gleichseitigen und kongruenten Dreieckchen aus welchen das Drahtnetz bestehen soll, eingezeichnet, so ist ersichtlich, dass an einer Ecke des Dreiecks, z. B. an der Ecke C, 1 solches gleichseitiges Dreieckchen entsteht, dass in der nächstfolgenden Reihe 3, in den darauffolgenden Reihen bezw. 5, 7, 9 . . . solcher Dreieckchen entstehen müssen.

Da hiernach in jeder Reihe 2 Dreiecke mehr entstehen, als in der nächst vorhergehenden Reihe, so bilden hiernach die Anzahlen der in den einzelnen Reihen liegenden Dreieckchen in ihrer Aufeinanderfolge eine arithmetische Reihe.

In derselben ist:

das Anfangsglied $a = 1$ }
die Differenz $d = 2$ } bekannt,
die Summe $s = 144$ }

ferner ist die Anzahl n der Glieder der Reihe, d. i. die Anzahl der Dreiecksreihen, bezw. die Zahl der Dreieckchen, welche an einer Seite des Dreiecks ABC zu liegen kommen, unbekannt, nämlich $= y$.

Nach vorstehender Formel I erhält man für y die Bestimmungsgleichung:

1). . $144 = \frac{y}{2}\left(2 \cdot 1 + (y-1) \cdot 2\right)$

woraus sich nach der Erkl. 62:

a). . . . . $y = 12$ ergibt.

Man weiss somit, dass an jeder Seite des gegebenen Dreiecks 12 der kongruenten gleichseitigen Dreieckchen zu liegen kommen und demnach kann man das Drahtnetz ununterbrochen wie folgt bilden.*)

z. B. von dem Punkte A, siehe Figur 5, ausgehend, ziehe man den Draht um das ganze Dreieck ABC, dann ziehe man den Draht von A nach 1, von 1 nach 2, von 2 nach 3, von 3 nach 4, von 4 nach 5, von 5 nach 6, von 6 nach 1; dann von 1 nach 7, von 7 nach 8, von 8 nach 9, von 9 nach 10, von 10 nach 11, von 11 nach 12, von 12 nach 7; dann von 7 nach 13, von 13 nach 14, von 14 nach 15, von 15 nach 16, von 16 nach 17, von 17 nach 18, von 18 nach 13; dann von 13 nach 19, von 19 nach 20, 21, 22, 23, 24, 19, von 19 nach 25, 26, 27, 28, 29, 30, 25, von 25 nach 31, 32, 33, 31.

Das Drahtnetz besteht hiernach aus den drei Dreiecksseiten AB, BC und CA, den mit diesen Seiten parallel gezogenen Linien und noch aus der Strecke von A nach 31, d. i. die halbe Seite AB.

Mittelst dieser Betrachtung kann man nun die Länge des zur Bildung des Netzes erforderlichen Drahtes berechnen.

Bezeichnet man nämlich mit z die Länge des Drahtstückchens, welches zur Bildung einer der Seiten der 144 kongruenten Dreieckchen erforderlich ist, so hat man, da die 144 Dreieckchen an Inhalt so gross sein müssen als das gegebene Dreieck ABC, dessen Inhalt 20 qm beträgt, und der Inhalt eines

Erkl. 62. Nebenstehende Gleichung 1.):

$$144 = \frac{y}{2}\left(2 \cdot 1 + (y-1) \cdot 2\right)$$

nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$144 = \frac{y}{2}\left(2 + 2y - 2\right)$$

$$144 = \frac{y}{2} \cdot 2y$$

$$y^2 = 144$$

$$y = \pm\sqrt{144} = +12$$

Erkl. 63. Die Formel zur Berechnung des Inhalts J eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite mit s bezeichnet wird, ist:

$$J = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$$

Man siehe den Abschnitt der Planimetrie, welcher über die Berechnung des Dreiecks handelt.

Erkl. 64. Nebenstehende Gleichung 2).:

$$144 \cdot \frac{z^2}{4} \sqrt{3} = 20$$

nach z aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$z^2 = \frac{4 . 20}{144 . \sqrt{3}}$$

$$z^2 = \frac{20}{36 \sqrt{3}}$$

$$z^2 = \frac{5}{9 \sqrt{3}}$$

$$z = \sqrt{\frac{5}{9 . \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{5 . \sqrt{3}}{9 . \sqrt{3} . \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{5 \sqrt{3}}{9 . 3}} \text{ oder:}$$

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5 \sqrt{3}}{3}}$$

Erkl. 65. Die Summenreihe:

$$u = 12 z + 11 z + 10 z + \ldots . . z$$

ist eine arithmetische, deren
Anfangsglied $a = 12 z$, deren
Endglied $t = z$, "
Gliederzahl $n = 12$ gegeben,
und deren Summe $s = u$ gesucht ist.

Nach umstehender Formel II:

$$s = \frac{n}{2}(a + t)$$

findet man hiernach:

$$u = \frac{12}{2}(12 z + z) \text{ oder:}$$

$$u = 6 . 13 z$$

$$u = 78 z$$

Hülfsrechnung.

$$\log x = \log 80 + \frac{1}{2} (\log 5 + \frac{1}{2} \cdot \log 3 - \log 3)$$

Nun ist:	$\log 5 =$	0,6989700
$+ \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4771213$	$=$	$+0{,}2385606$
		0,9375306
	$- \log 3 =$	$-0{,}4771213$
		0,4604093
		$\cdot \frac{1}{2}$
		0,2302046
	$+ \log 80 =$	1,9030900
	$\log x =$	2,1332946
		2834
		112
		95,7

mithin:

$$\text{numlog } x = 135{,}923$$

dieser Dreieckchen nach der Erkl. 63 $= \frac{z^2}{4} \sqrt{3}$ ist, die Gleichung:

$$2). \; . \; . \; 144 \cdot \frac{z^2}{4} \sqrt{3} = 20$$

aus welcher man nach der Erkl. 64:

$$b). \; . \; . \; z = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5 \sqrt{3}}{3}} \text{ Meter erhält.}$$

Da nun z. B. die Dreiecksseite AB aus $12 z$, die erste damit parallel gezogene Linie aus $11 z$, die folgende aus $10 z$ u. s. f., die letzte aus $1 z$ besteht und man für die Summe u der Längen der Seite AB und den damit parallel gezogenen Linien somit:

$$3). \; . \; . \; u = 12 z + 11 z + 10 z + \ldots z$$

oder nach der Erkl. 65:

$$c). \; . \; . \; u = 78 . z \text{ hat,}$$

und da ferner die Summe der Längen der Seite BC und den damit parallel gezogenen Linien, ebenso die Summe der Längen der Seite CA und den damit parallel gezogenen Linien ebenfalls je $= 78 . z$ ist, ausserdem das Stück $A 31$ der Seite AB doppelt mit Draht bezogen wird und $= 6 z$ ist, so hat man für die gesuchte Länge x des erforderlichen Drahtes:

$$4). \; . \; . \; x = 3 . 78 z + 6 z \text{ oder:}$$

$$x = 234 z + 6 z$$

$$d). \; . \; . \; x = 240 z$$

Substituiert man den Wert für z aus Gleichung b)., so erhält man:

$$x = 240 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5 \sqrt{3}}{3}} \text{ oder:}$$

$$5). \; . \; . \; x = 80 \sqrt{\frac{5 \sqrt{3}}{3}}$$

Nach nebenstehender Hülfsrechnung braucht man also zur ununterbrochenen Bildung des Drahtnetzes einen Draht, der

$$x = 135{,}923 \text{ m lang ist.}$$

*). Die Bildung des Drahtnetzes kann ununterbrochen auch noch auf andere Weisen geschehen, die in der vorstehenden Lösung angegebene ist jedenfalls die einfachste.

Aufgabe 38. Auf eine cylindrische Spindel von $r = 2\frac{1}{2}$ cm Radius und $H = 25$ cm Höhe soll ein Faden von $\delta = \frac{1}{4}$ mm Dicke gewickelt werden und zwar so, dass er eine $D = 5$ cm dicke Schicht bildet. Wie lang muss der Faden sein?

Erkl. 66. Die in der Aufgabe 38 erwähnte cylindrische Spindel ist ein **gerader Kreiscylinder.** Unter dem Umfang eines geraden Kreiscylinders versteht man den Umfang des Grundkreises; unter dem Radius des Cylinders versteht man den Radius des Grundkreises.

Bezeichnet r den Radius eines Kreises, U den Umfang desselben, so besteht die Relation:

$$U = 2r\pi$$

Formel: $s = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)\,d\right)$

(siehe Gleichung 9, Seite 10).

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Länge x des Fadens stelle man folgende Betrachtung an:

Zur ersten einmaligen Umwicklung der cylindrischen Spindel braucht man einen Faden, dessen Länge gleich dem Umfang $2r\pi$ (siehe Erkl. 66) der Spindel ist.*)

Da man nun den Faden so oft übereinander um die Spindel legen kann als die Dicke δ des Fadens in der Höhe H der Spindel enthalten ist, so braucht man **zur ersten ganzen** Umwicklung der Spindel:

$$2\pi r \cdot \frac{H}{\delta} \text{ Längeneinheiten des Fadens.}$$

Bei der zweiten Umwicklung beachte man, dass man nunmehr eine cylindrische Spindel zu umwickeln hat, deren Radius um die Dicke δ des Fadens grösser ist, als der Radius r. Analog wie vorhin braucht man somit **zur zweiten ganzen** Umwicklung:

$$2\pi(r+\delta) \cdot \frac{H}{\delta} \text{ Längeneinheiten d. Fadens.}$$

Da ferner bei der dritten Umwicklung der Radius der nunmehr zu umwickelnden Spindel um 2 Fadendicken grösser geworden ist, so braucht man **zur dritten ganzen** Umwicklung:

$$2\pi(r+2\delta) \cdot \frac{H}{\delta} \text{ Längeneinheiten d. Fadens.}$$

Analog zur 4., 5., ... Umwicklung, bezw.:

$$2\pi(r+3\delta) \cdot \frac{H}{\delta}$$

$$2\pi(r+4\delta) \cdot \frac{H}{\delta} \text{ u. s. f., u. s. f.}$$

Da nun die umwickelte Fadenschicht die Dicke D erreichen soll, so sind hierzu soviele ganze Umwicklungen erforderlich, als die Dicke δ des Fadens in der Dicke D der Schicht enthalten ist, d. s. $\frac{D}{\delta}$ ganze Umwicklungen.

Zur letzten Umwicklung braucht man,

Erkl. 67. In der arithmetischen Reihe:

$$r,\ (r+\delta),\ (r+2\delta),\ (r+3\delta),\ \ldots\ldots \left(r+\left(\frac{D}{\delta}-1\right)\delta\right)$$

ist: das Anfangsglied $a = r$,
die Differenz $d = \delta$,
die Anzahl n der Glieder $= \frac{D}{\delta}$ gegeben.

Nach umstehender Formel:

$$s = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)\,d\right)$$

erhält man für die Summe s der Glieder dieser Reihe:

$$s = \frac{D}{2\delta}\left(2r+\left(\frac{D}{\delta}-1\right)\delta\right)$$

oder:

$$s = \frac{D}{2\delta}\left(2r+D-\delta\right)$$

Hülfsrechnung.

$\log x = \log 3{,}141 + \log 125 + \log 9{,}975 - 2 . \log 0{,}025$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 3{,}141 &= 0{,}4971499\\
+\log 125 &= 2{,}0969100\\
+\log 9{,}975 &= 0{,}9989129\\
&\ 3{,}5929728\\
-2 . \log 0{,}025 = -2 . (0{,}3979400-2) &= -0{,}7958800+4\\
\log x &= 2{,}7970928+4
\end{aligned}$$

oder:

$$\log x = 6{,}7970928$$

0874
54
48,3
5,7
5,5

mithin:

$$\text{numlog}\ x = 6267478$$

analog der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, ... Umwicklung:

$$2\pi\left(r+\left(\frac{D}{\delta}-1\right)\delta\right)\cdot\frac{H}{\delta}\ \text{Längeneinheiten des Fadens.}$$

Zur Bestimmung der gesuchten Fadenlänge x des ganzen Fadens besteht hiernach die Gleichung:

$$1).\quad x = 2\pi r . \frac{H}{\delta} + 2\pi(r+\delta)\cdot\frac{H}{\delta} + 2\pi(r+2\delta)\cdot\frac{H}{\delta} + 2\pi(r+3\delta)\cdot\frac{H}{\delta} + \cdots \ldots + 2\pi\left(r+\left(\frac{D}{\delta}-1\right)\delta\right)\cdot\frac{H}{\delta}$$

Scheidet man auf der rechten Seite dieser Gleichung den gemeinschaftlichen Faktor: $2\pi . \frac{H}{\delta}$ aus, so resultiert:

$$2).\quad x = 2\pi\cdot\frac{H}{\delta}\left[r+(r+\delta)+(r+2\delta)+(r+3\delta)+(r+4\delta)+\cdots\left(r+\left(\frac{D}{\delta}-1\right)\delta\right)\right]$$

Da die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder in der eckigen Klammer dieser Gleichung **konstant** ist, folglich diese Glieder in ihrer Aufeinanderfolge eine arithmetische Reihe bilden, für deren Summe nach der Erkl. 67 $= \frac{D}{2\delta}(2r+D-\delta)$ gesetzt werden kann, so erhält man:

$$x = \frac{2\pi H}{\delta}\cdot\frac{D}{2\delta}\left(2r+D-\delta\right)$$

oder:

$$3).\quad x = \frac{\pi H D}{\delta^2}\left(2r+D-\delta\right)$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für H, D, r und δ gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach, wenn diese Zahlenwerte in ein und dasselbe Maass, z. B. in cm, ausgedrückt werden:

$$x = \frac{3{,}141 . 25 . 5}{0{,}025^2}\left(2 . 2{,}5+5-0{,}025\right)$$

oder:

$$4).\quad x = \frac{3{,}141 . 125}{0{,}025^2}\cdot 9{,}975$$

Für die gesuchte Länge x des Fadens

findet man hieraus nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$x = 6267478 \text{ cm}$$
$$= 62674{,}78 \text{ m} \text{ oder:}$$
$$= 62 \text{ Kilometer } 674 \text{ Meter und } 78 \text{ Centimeter.}$$

*) In der vorstehenden Lösung ist ein kleiner Fehler begangen worden, der jedoch auf das Resultat der Aufgabe fast ohne jeden Einfluss ist. Dieser Fehler bestand darin, dass angenommen wurde, jede einmalige Umwicklung der Spindel mittelst des Fadens sei gleich dem Umfang eines Kreises, bezw. gleich dem Umfang der Spindel; dies ist nämlich nicht der Fall, denn da der Faden fortgesetzt umwickelt wird, so muss sich z. B. nach der allerersten Umwicklung, also bei Beginn der 2 Umwicklung, der Faden über den Anfang des Fadens legen, d. h. der Faden bildet in jeder Umwicklung nicht die Peripherie eines Kreises, sondern den Gang einer cylindrischen Schraubenlinie. Da nun die Länge eines Gangs einer cylindrischen Schraubenlinie gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich dem Umfang $2r\pi$ des Grundkreises der Spindel und dessen andere Kathete gleich der Ganghöhe, in unserer Aufgabe $= \delta$ ist, so findet man für die Länge der ersten Umwicklung des Fadens:

$$\sqrt{(2r\pi)^2 + \delta^2}$$

Legt man der Lösung der Aufgabe diese richtigere aber kompliziertere Betrachtung zu Grunde und verfährt weiter, analog wie es in vorstehender Aufgabe geschehen ist, so wird man fast ganz dasselbe Resultat erhalten, welches in vorstehender Lösung gefunden wurde. Der Unterschied in beiden Lösungen beträgt ca. 2 cm.

Aufgabe 39. Wo begegnet in einem 360 m tiefen Schacht die aufsteigende Fördertonne der sinkenden, wenn die Förderung mit $\delta = 1\frac{1}{3}$ cm dicken Bandseilen geschieht, welche sich auf Seilkörbe von $r = 1$ m Radius aufwickeln, wobei die Windungen sich nur übereinanderlegen?

Formeln:

I. $$s = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)$$ (siehe Gleich. 9, Seite 10)

II. $$t = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}$$

(siehe Gleichung 14, Seite 11)

Auflösung. Legt die aufsteigende Fördertonne vom Boden des Schachtes bis zum Begegnungspunkte mit der sinkenden Fördertonne einen Weg von x Meter, und legt die sinkende Fördertonne vom Rande des Schachtes bis zum Begegnungspunkte mit der steigenden Fördertonne einen Weg von y Meter zurück, so muss zwischen beiden Wegen x und y die Relation bestehen:

1). . . . $x + y = 360 \text{ m}$

Zur Aufstellung weiterer Bestimmungsgleichungen muss nunmehr die Art der Bewegung der Fördertonnen (siehe Erkl. 68) in Betracht gezogen werden.

Werden die Seilkörbe mittelst der

Erkl. 68. Jede der Fördertonnen (dieselben können z. B. die Gestalt von Eimer haben) ist an einem flachen Seile, sogenanntem Bandseile, befestigt. Diese Seile sind gleich lang und ist jedes derselben an einer schmalen cylindrischen Spindel befestigt. Die diese Spindel begrenzenden ebenen Seitenflächen sind in ihrer Kreisform bedeutend erweitert, so dass zwischen denselben ein hohler cylindrischer Raum entsteht, der zur Aufnahme der sich aufwickelnden Seile dient, daher der Name dieser cylindrischen Spindel mit ihren erweiterten Seitenflächen „**Seilkorb.**" Dadurch ferner, dass der Abstand jener kreisförmig erweiterten Seitenflächen der Spindel nur um geringes grösser ist als die Breite des Seils, wird das Seil gezwungen, sich bei der Aufwicklung desselben übereinander zu legen.

Die beiden die Seile der Fördertonnen aufnehmenden Seilkörbe sind auf einer grossen Walze, welche durch irgend eine bewegende Kraft in eine drehende Bewegung gesetzt werden kann, befestigt. Dadurch nun, dass das ganze Seil (oder wenigstens der grössere Teil desselben) der einen Fördertonne **links** um die Spindel des betreffenden Seilkorbs, ein Stück des Seils der anderen Fördertonne aber **rechts** um die Spindel des diesem Seils zugehörigen Seilkorbs geschlungen ist, wird bezweckt, dass wenn die Walze, auf welchen die Seilkörbe befestigt sind, um ihre Achse gedreht wird, das eine Seil sich **auf-**, das andere aber sich **abwickelt.**

Walze auf welchen sie befestigt sind, in drehende Bewegung gesetzt, so hat sich nach der **ersten einmaligen** Umdrehung der Walze das Seil der aufsteigenden Fördertonne um den Umfang*) des zugehörigen Seilkorbs, nämlich um $2r\pi$ Meter verkürzt (wenn r den Radius des Seilkorbs, bezw. den Radius der zugehörigen cylindrischen Spindel bedeutet), d. h. diese Fördertonne ist um $2r\pi$ Meter gestiegen. Gleichzeitig ist aber die sinkende Fördertonne bei dieser ersten einmaligen Umdrehung um den Umfang des zugehörigen Seilkorbs, nämlich um $2v\pi$ Meter gesunken (wenn v den Radius des Seilkorbs, d. i. der Radius r der zugehörigen cylindrischen Spindel plus der Anzahl der Seildicken, welche angibt, wie oft das Seil, da es bei der sinkenden Fördertonne aufgewickelt ist, um diese Spindel geschlungen war).

Vor der 2ten **einmaligen** Umdrehung der Walze ist sonach der Radius des Seilkorbs der aufsteigenden Fördertonne $= r + \delta$, nämlich gleich dem Radius r der Spindel plus der Dicke δ des Seils, welches nunmehr einmal um die Spindel gewickel wurde; während der Radius des Seilkorbs der sinkenden Fördertonne $= v - \delta$, nämlich gleich dem ursprünglichen Radius v der Spindel (siehe Erkl. 71) minus der einmaligen Dicke δ des Seils, welches nunmehr einmal von der Spindel abgewickelt wurde.

Nach der 2ten **einmaligen** Umdrehung der Walze ist sonach die steigende Fördertonne um $2\pi(r+\delta)$ gestiegen, während die sinkende Fördertonne um 2π $(v-\delta)$ gesunken ist.

Nach der 3ten, 4ten, 5ten, ... **einmaligen** Umdrehung der Walze wird, analog wie vorhin, die steigende Fördertonne bezw. um:

$2\pi(r+2\delta)$, $2\pi(r+3\delta)$, $2\pi(r+4\delta)$....

steigen, während die sinkende Fördertonne bezw. um:

$2\pi(v-2\delta)$, $2\pi(v-3\delta)$, $2\pi(v-4\delta)$....

sinken wird.

Nimmt man nun an, nach der z^{ten} Umdrehung der Walze, bezw. der Seilkörbe, begegneten sich beide Fördertonnen, so hat man hiernach für den

Erkl. 69. Die in nebenstehender Gleich. c). vorkommende Summenreihe:

$$r+(r+\delta)+(r+2\delta)+\ldots.+(r+(z-1)\delta)$$

ist, da die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant, nämlich je $=\delta$ ist, eine arithmetische Reihe.

In derselben ist:
das Anfangsglied $a = r$,
die Differenz $d = \delta$,
die Anzahl n der Glieder $= z$.

Für die Summe s hat man somit nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)\,d\right)$$

$$s = \frac{z}{2}\left(2r+(z-1)\,\delta\right)$$

Nebenstehende Gleich. c). geht somit über in:

$$x = 2\pi\cdot\frac{z}{2}\left(2r+(z-1)\,\delta\right)$$

oder in:

$$x = \pi z\,(2r+(z-1)\,\delta)$$

Erkl. 70. Die in nebenstehender Gleich. d). vorkommende Summenreihe:

$$v+(v-\delta)+(v-2\delta)+\ldots.+(v-(z-1)\delta)$$

ist, da die Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant, nämlich $=-\delta$ ist, eine arithmetische Reihe.

In derselben ist:
das Anfangsglied $a = v$,
die Differenz $d = -\delta$,
die Anzahl n der Glieder $= z$.

Für die Summe s hat man somit nach der Formel:

$$s = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)\,d\right)$$

$$s = \frac{z}{2}\left(2v+(z-1)\cdot-\delta\right)$$

oder:

$$s = \frac{z}{2}\left(2v+(1-z)\,\delta\right)$$

Nebenstehende Gleich. d). geht somit über in:

$$y = 2\pi\cdot\frac{z}{2}\left(2v+(1-z)\,\delta\right)$$

oder in:

$$y = \pi z\,(2v+(1-z)\,\delta)$$

Weg x der steigenden Fördertonne die Gleichung:

a). $x = 2\pi r+2\pi(r+\delta)+2\pi(r+2\delta)+2\pi(r+3\delta)+\cdots+2\pi(r+(z-1)\,\delta)$

ferner hat man hiernach für den Weg y der sinkenden Fördertonne die Gleichung:

b). $y = 2\pi v+2\pi(v-\delta)+2\pi(v-2\delta)+2\pi(v-3\delta)+\cdots+2\pi(v+(z-1)\,\delta)$

Diese beiden Gleichungen gehen durch Reduktion über in:

c). $x = 2\pi\,[r+(r+\delta)+(r+2\delta)+(r+3\delta)+\cdots+(r+(z-1)\,\delta)]$

d). $y = 2\pi\,[v+(v-\delta)+(v-2\delta)+(v-3\delta)+\cdots+(v-(z-1)\,\delta)]$

und für diese beiden Gleichungen kann man nach den Erklärungen 69 und 70:

2). . . $x = \pi z\,(2r+(z-1)\,\delta)$ und

3). . . $y = \pi z\,(2v+(1-z)\,\delta)$

setzen.

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nunmehr die gesuchten Längen x und y berechnen, sobald man die Anzahl z der Umdrehungen kennt, welche die Walze mit den Seilkörben bis zum Begegnungspunkt der beiden Fördertonnen machen muss und sobald man den Radius v kennt, welchen der Seilkorb der sinkenden Tonne in dem Augenblick hat in welchem diese Tonne sich am Rande des Schachts befindet. Den Radius v kann man wie in der Erkl. 71 gezeigt ist, finden; man wird erhalten:

4). . . . $v = 1{,}5925$ m

Die Anzahl z der Umdrehungen der Walze bis beide Fördertonnen sich begegnen, findet man alsdann aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). Aus diesen drei Gleichungen folgt nämlich:

$$\pi z\left(2r+(z-1)\,\delta\right)+\pi z\left(2v+(1-z)\,\delta\right) = 360$$

und hieraus ergibt sich für z der Reihe nach:

$$z\left(2r+(z-1)\,\delta+2v+(1-z)\,\delta\right) = \frac{360}{\pi}$$

$$z\left(2r+z\delta-\delta+2v+\delta-z\delta\right) = \frac{360}{\pi}$$

Erkl. 71. Um den Radius v zu finden, welchen der eine Seilkorb durch Aufwicklung des vom Rande bis zum Boden des Schachtes reichenden, also 360 Meter langen Seils erlangt, mache man folgende Betrachtung:

Ist r der Radius der Spindel des Seilkorbs, also ist $2\pi r$ der Umfang desselben, so nimmt der Seilkorb bei der ersten einmaligen Umwicklung desselben $2r\pi$ Meter des Seils auf. Da alsdann der Radius des Seilkorbs um die Dicke δ des Seils grösser geworden, also der jetzige Umfang $= 2\pi(r+\delta)$ ist, so nimmt der Seilkorb bei der 2ten einmaligen Umwicklung $= 2\pi(r+\delta)$, analog bei der 3ten, 4ten, ... Umwicklung bezw. $2\pi(r+2\delta)$, $2\pi(r+3\delta)$,... Meter des Seils auf. Wird der Radius des Seilkorbs vor der letzten Umwicklung, nach welcher 360 Meter der Länge des Seils aufgewickelt sind, mit v bezeichnet, so ist der Umfang des Seilkorbs $= 2\pi v$ und hiernach nimmt der Seilkorb bei der letzten Umwicklung $2\pi v$ Meter des Seils auf. Da die Summe der Längen der sämtlichen Umwicklungen des Seilkorbs gleich der Länge des vom Rande bis an den Boden des Schachtes reichenden Seils, nämlich $= 360$ Meter sein muss, so hat man für v die Bestimmungsgleichung:

$$360 = 2\pi r + 2\pi(r+\delta) + 2\pi(r+2\delta) + 2\pi(r+3\delta) + \ldots + 2\pi(v-\delta) + 2\pi v$$

oder:

$$360 = 2\pi\left[r + (r+\delta) + (r+2\delta) + (r+3\delta) + \ldots\ldots + (v-\delta) + v\right]$$

oder:

$$\frac{360}{2\pi} = r + (r+\delta) + (r+2\delta) + (r+3\delta) + \ldots\ldots\ldots + (v-\delta) + v$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung eine arithmetische Reihe vorstellt, deren

Summenglied $s = \frac{360}{2\pi}$, deren
Anfangsglied $a = r$, „
Differenz $d = \delta$ und „
Endglied $t = v$ gesucht ist,

so erhält man nach der Formel:

$$v = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}$$

(siehe Gleichung 14, Seite 11)

für den gesuchten Radius v:

$$v = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{2\delta \cdot \frac{360}{2\pi} + \left(r - \frac{\delta}{2}\right)^2}$$

oder:

$$\text{a).} \quad v = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{360\delta}{\pi} + \left(r - \frac{\delta}{2}\right)^2}$$

$$z\left(2r + 2v\right) = \frac{360}{\pi}$$

$$z = \frac{360}{\pi(2r+2v)} = \frac{360}{2\pi(r+v)}$$

oder:

$$5). \quad \ldots \quad z = \frac{180}{\pi(r+v)}$$

Setzt man in diese Gleichung den für r gegebenen und den in Gleich. 4). für v gefundenen Wert, so erhält man:

$$z = \frac{180}{3{,}141\,(1+1{,}5925)}$$

oder:

$$z = \frac{180}{3{,}141 \,.\, 2{,}5925}$$

Mittelst Logarithmen findet man für die Anzahl z der Umdrehungen der Seilkörbe, welche erforderlich sind bis beide Fördertonnen sich begegnen:

$$6). \quad \ldots \quad z = 22\frac{1}{10}$$

Substituiert man diesen Wert für z und die für r und δ gegebenen Werte in Gleichung 2)., so erhält man endlich:

$$x = 3{,}141 \,.\, 22{,}1\left(2 \,.\, 1 + (22{,}1-1) \cdot \frac{1}{75}\right)$$

oder:

$$x = 69{,}4161\left(2 + \frac{21{,}1}{75}\right) = \frac{69{,}4161 \,.\, 171{,}1}{75} = \frac{11877{,}09471}{75}$$

mithin:

$$\text{A).} \quad \ldots \quad x = 158{,}361265$$

Substituiert man ferner die für r und δ gegebene und für z und v gefundenen Werte in Gleichung 2)., so erhält man:

$$y = 3{,}141 \,.\, 22{,}1\left(2 \,.\, 1{,}5925 + (1-22{,}1) \cdot \frac{1}{75}\right)$$

oder:

$$y = 69{,}4161\left(3{,}1850 - \frac{21{,}1}{75}\right) = \frac{69{,}4161 \,.\, 217{,}775}{75} = \frac{15117{,}0911775}{75}$$

mithin:

$$\text{B).} \quad \ldots \quad y = 201{,}5612156\ldots$$

Da nun in der Aufgabe

$$r = 1 \text{ m}$$

$$\delta = 1\frac{1}{3}\text{ cm} = \frac{4}{3}\text{ cm} = \frac{4}{300}\text{ m} = \frac{1}{75}\text{ m}$$

gegeben ist, so erhält man aus vorstehender Gleichung a).:

$$v = -\frac{1}{75.2} + \sqrt{\frac{360.1}{\pi.75} + \left(1 - \frac{1}{2.75}\right)^2}$$

oder:

$$v = -\frac{1}{150} + \sqrt{\frac{72}{3{,}141.15} + \left(\frac{150-1}{150}\right)^2}$$

$$v = -\frac{1}{150} + \sqrt{\frac{24}{3{,}141.5} + \left(\frac{149}{150}\right)^2}$$

$$v = -\frac{1}{150} + \sqrt{\frac{24}{15{,}705} + 0{,}99333^2}$$

$$v = -0{,}006666 + \sqrt{1{,}528175 + 0{,}986705}$$

$$v = -0{,}006666 + \sqrt{2{,}514880}$$

$$v = -0{,}006666 + 1{,}58584 = 1{,}59250$$

$$\underline{\underline{v = 1{,}5925 \text{ m}}}$$

Die beiden Fördertonnen begegnen sich hiernach:

158,4 m vom Boden des Schachtes an gemessen, oder:

201,6 m vom Rande des Schachtes an gemessen. Der Begegnungspunkt beider Tonnen teilt die Tiefe des Schachtes im Verhältnis von

$$158{,}4 : 201{,}6 = 1584 : 2016$$

d. i. im Verhältnis:

$$11 : 14$$

*). Auch in dieser Aufgabe hätte, analog wie in der Aufgabe 38, berücksichtigt werden müssen, dass die Länge des Seilstücks, welches sich bei der ersten einmaligen Umdrehung des Seilkorbs um diesen Seilkorb wickelt, nicht gleich dem Umfange eines Kreises, sondern gleich der Länge des Ganges einer cylindrischen Schraubenlinie ist und dass diese Länge gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete gleich dem Umfang des Seilkorbs und dessen andere Kathete gleich der Dicke des Seils ist.

Aufgabe 40. In einer **geometrischen** Reihe in der die Summe der 3 ersten Glieder $7\frac{1}{8}$ beträgt und die 2 ersten Glieder um $4\frac{1}{8}$ grösser sind als das 3te Glied, sollen zwischen dem 1ten und 2ten Gliede, ebenso zwischen dem 2ten und 3ten Gliede u. s. f., je zwei neue Glieder eingeschaltet werden, dass abermals eine geometr. Reihe entsteht; wie heisst die ursprüngliche und wie die neue Reihe?

Erkl. 72. Aus nebenstehenden Gleichungen:

1). . . . $x + xy + xy^2 = 7\frac{1}{8}$

2). . . . $x + xy = xy^2 + 4\frac{1}{8}$

findet man x und y, wie folgt:

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$2x + 2xy = 7\frac{1}{8} + 4\frac{1}{8} = 11\frac{2}{8} = \frac{90}{8}$$

oder:

3). . . . $x + xy = \frac{45}{8}$

Subtrahiert man die Gleichung 2). von Gleichung 1)., so erhält man die weitere einfachere Gleichung:

Formel:

$$t = aq^{n-1}$$ (siehe Formel I, Seite 18).

Auflösung. Um die gesuchte geometrische Reihe aufstellen zu können, muss man das Anfangsglied und den Quotient derselben berechnen.

Bezeichnet man das unbekannte Anfangsglied der Reihe mit x, den unbekannten Quotienten mit y, also ist das 1te Glied der Reihe $= x$, das 2te Glied $= x.y$, das 3te Glied $= x.y^2$, so bestehen der Aufgabe gemäss die Bestimmungsgleichungen:

1). . . $x + xy + xy^2 = 7\frac{1}{8}$

2). . . $x + xy = xy^2 + 4\frac{1}{8}$

Da man aus diesen Gleichungen, wie aus der Erkl. 72 ersichtlich, für

$$x = \frac{27}{8} \quad \text{oder} = \frac{75}{8} \quad \text{und}$$

$$y = \frac{2}{3} \quad „ \quad = -\frac{2}{5} \quad \text{findet,}$$

so ist die gesuchte Reihe entweder:

$$2xy^2 = 7\frac{1}{8} - 4\frac{1}{8} = 3$$

oder:

4). . . . . $xy^2 = \frac{3}{2}$

Setzt man nunmehr den aus Gleichung 4). für x sich ergebenden Wert:

5). . . . . $x = \frac{3}{2y^2}$

in Gleichung 3). ein, so wird:

$$\frac{3}{2y^2} + \frac{3}{2y^2} \cdot y = \frac{45}{8}$$

und hieraus ergibt sich y der Reihe nach, wie folgt:

$$3 + 3y = \frac{45}{8} \cdot 2y^2$$

$$45y^2 - 12y = 12$$

$$y^2 - \frac{12}{45}y = \frac{12}{45}$$

$$y^2 - \frac{4}{15}y = \frac{4}{15}$$

$$y^2 - \frac{4}{15}y + \left(\frac{2}{15}\right)^2 = \frac{4}{15} + \left(\frac{2}{15}\right)^2$$

$$\left(y - \frac{2}{15}\right)^2 = \frac{4}{15} + \frac{4}{15^2}$$

$$y - \frac{2}{15} = \pm\sqrt{\frac{60+4}{15^2}}$$

$$y = \frac{2}{15} \pm \sqrt{\frac{64}{15^2}}$$

$$y = \frac{2}{15} \pm \frac{8}{15}$$

somit erhält man:

a). . . . $\begin{cases} y_1 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\ y_2 = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{15} \end{cases}$

Setzt man diese für y gefundenen Werte in Gleichung 5). ein, so erhält man die zugehörigen Werte für x:

b). . . . $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{27}{8} \\ x_2 = \frac{3}{2\cdot\left(-\frac{6}{15}\right)^2} = \frac{75}{8} \end{cases}$

A). $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$ oder:

B). $\frac{75}{8}, -\frac{15}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{25}, \ldots$

Sollen nun zwischen dem 1. und 2. Gliede (oder zwischen dem 2. und 3. Gliede) einer jeden dieser Reihen zwei weitere Glieder interpoliert werden, dass die neu erhaltene Reihe wieder eine geometrische ist, so beachte man, dass demnach z. B. das 1. und 2. Glied einer der vorstehenden Reihen A). und B). mit den 2 zu suchenden dazwischen liegenden Gliedern eine geometrische Reihe bilden, von der

das Anfangsglied $a = \frac{27}{8}$ (für die Reihe A).),
oder $= \frac{75}{8}$ („ „ „ B).),
das Endglied $t = \frac{9}{4}$ (für die Reihe A).),
oder $= -\frac{15}{4}$ („ „ „ B).),
und die Anzahl n der Glieder $= 4$

gegeben ist und dass man somit nach vorstehender Formel:

$$t = aq^{n-1}$$

den Quotienten z der aus der Reihe A). sich ergebenden neuen Reihe mittelst der Gleichung:

3). . . . $\frac{9}{4} = \frac{27}{8} \cdot z^{4-1}$

und den Quotienten v der aus der Reihe B). sich ergebenden neuen Reihe mittelst der Gleichung:

4). . . . $-\frac{15}{4} = \frac{75}{8} \cdot v^{4-1}$

berechnen kann.

Da man aus der Gleichung 3). für den Quotienten z:

c). . . . $z = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (siehe Erkl. 73)

und aus der Gleichung 4). für den Quotienten v:

d). . . . $v = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$ (siehe Erkl. 74)

erhält, so ergeben sich aus den Reihen A). und B). die dem Sinne der Auf-

Erkl. 73. Aus nebenstehender Gleich. 3).:

$$\frac{9}{4} = \frac{27}{8} \cdot z^{4-1}$$

erhält man z, wie folgt:

$$\frac{9.8}{4.27} = z^3$$

$$z^3 = \frac{2}{3}$$

mithin: $$z = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Erkl. 74. Aus umstehender Gleichung 4).:

$$-\frac{15}{4} = \frac{75}{8} \cdot v^{4-1}$$

erhält man v, wie folgt:

$$-\frac{15.8}{4.75} = v^3$$

$$v^3 = -\frac{2}{3}$$

mithin: $$v = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$$

gabe entsprechenden neuen geometrischen Reihen:

C). $\frac{27}{8}$, $\frac{27}{8}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $\frac{27}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\left(= \frac{27}{8}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$, $\frac{27}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\left(= \frac{27}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{4}\right)$, $\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, ...

D). $\frac{75}{8}$, $\frac{75}{8}\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$, $\frac{75}{8}\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\left(= \frac{75}{8}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$, $\frac{75}{8}\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}\left(= \frac{75}{8} \cdot -\frac{2}{3} = -\frac{15}{4}\right)$, $-\frac{15}{4} \cdot \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$, $-\frac{15}{4}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, ...

Aufgabe 41. Das 1. Glied einer geometrischen heisst:

$$\frac{a^2}{b}\left(1 + x - x^2 - x^3\right)$$

das 5. Glied:

$$\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2}$$

Wie heisst der Quotient, wie heissen die übrigen Glieder und wie gross ist die Summe dieser 5gliedrigen Reihe?

Erkl. 75. Aus nebenstehender Gleichung 1).:

$$\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2} = \frac{a^2}{b}\left(1 + x - x^2 - x^3\right) . q^{5-1}$$

erhält man q, wie folgt:

$$\frac{b^3(1-x) . b}{a^2(1+x)^2 . a^2 . (1 + x - x^2 - x^3)} = q^4$$

$$q^4 = \frac{b^4(1-x)}{a^4(1+x)^2(1 + x - x^2 - x^3)}$$

mithin:

$$q = \sqrt[4]{\frac{b^4(1-x)}{a^4(1+x)^2(1 + x - x^2 - x^3)}}$$

Hieraus erhält man nach der Erkl. 76:

$$q = \sqrt[4]{\frac{b^4(1-x)}{a^4(1+x)^2(1+x)^2(1-x)}}$$

oder:

Formeln:

I. . . $t = a q^{n-1}$ (siehe Formel I, Seite 18)

II. . . $s = \dfrac{tq - a}{q-1}$ („ „ 3, „ 19)

Auflösung. Da von der gedachten geometrischen Reihe:

das Anfangsglied $a = \frac{a^2}{b}(1 + x - x^2 - x^3)$

das Endglied $t = \frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2}$ und

die Anzahl n der Glieder $= 5$ gegeben ist,

so findet man den Quotienten q dieser Reihe nach vorstehender Formel I.

Setzt man in diese Formel die für a, n und t gegebenen Werte ein, so ist:

1). $$\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2} = \frac{a^2}{b}\left(1 + x - x^2 - x^3\right) \cdot q^4$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 75 den gesuchten Quotienten:

A). . . . $$q = \frac{b}{a(1+x)}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{b^4}{a^4(1+x)^4}}$$

mithin:

$$q = \frac{b}{a(1+x)}$$

Erkl. 76. Die Summe:

$$1 + x - x^2 - x^3$$

kann man, wie folgt in ein Produkt verwandeln:

$$\begin{aligned} 1 + x - x^2 - x^3 &= (1+x) - x^2(1+x) \\ &= (1+x)(1-x^2) \\ &= (1+x)(1^2-x^2) \\ &= (1+x)(1+x)(1-x) \end{aligned}$$

mithin ist:

$$(1+x-x^2-x^3) = (1+x)^2(1-x)$$

Erkl. 77. Für:

$$\frac{a^2(1+x)^2(1-x)}{b} \cdot \frac{b}{a(1+x)}$$

kann man setzen:

$$a(1+x)(1-x), \quad \text{d. i.:} \quad a(1^2-x^2)$$

$$\text{oder:} \quad a(1-x^2)$$

Erkl. 78. Für:

$$a(1-x^2) \cdot \frac{b}{a(1+x)}$$

kann man setzen:

$$\frac{b(1-x^2)}{1+x} = \frac{b(1^2-x^2)}{1+x} = \frac{b(1+x)(1-x)}{1+x}$$

$$\text{oder} = b(1-x^2)$$

Erkl. 79. Den in nebenstehender Gleich. 2). vorkommenden Ausdruck:

$$\frac{\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2} \cdot \frac{b}{a(1+x)} - \frac{a^2(1+x)^2(1-x)}{b}}{\frac{b}{a(1+x)} - 1}$$

kann man, wie folgt reduzieren:

Den Dividenden und auch den Divisor je unter gleiche Benennung gebracht, gibt:

$$\frac{\frac{b^5(1-x) - a^5(1+x)^2(1-x)(1+x)^2(1+x)}{a^3b(1+x)^2(1+x)}}{\frac{b-a(1+x)}{a(1+x)}}$$

oder:

$$\frac{[b^5(1-x) - a^5(1+x)^5(1-x)] \,.\, a(1+x)}{a^3b(1+x)^3 \,.\, (b-a(1+x))} =$$

$$\frac{b^5(1-x) - a^5(1+x)^5(1-x)}{a^2b(1+x)^2(b-a(1+x))} =$$

$$\frac{(1-x)(b^5-a^5(1+x)^5)}{a^2b(1+x)^2(b-a(1+x))}$$

Multipliziert man jetzt das gegebene Anfangsglied der Reihe nacheinander mit q, dann mit q^2 und mit q^3, so erhält man mit Hülfe der Erkl. 76, 77 und 78 die aufeinanderfolgenden Glieder der nachstehenden gesuchten Reihe:

$$\text{B).} \quad \frac{a^2(1+x)^2(1-x)}{b}, \quad a(1-x^2),$$

$$b(1-x), \quad \frac{b^2(1-x)}{a(1+x)}, \quad \frac{b^3}{a^2(1+x)^2}$$

Für die Summe s der Glieder dieser Reihe findet man unter Benutzung der vorstehenden Formel II:

$$\text{2).} \quad s = \frac{\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2} \cdot \frac{b}{a(1+x)} - \frac{a^2(1+x)^2(1-x)}{b}}{\frac{b}{a(1+x)} - 1}$$

oder nach der Erkl. 79:

$$\text{C).} \quad s = \frac{(1-x) \,.\, (b^5 - a^5(1+x)^5)}{a^2b(1+x)^2 \,.\, (b-a(1+x))}$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } **Rentenrechnung** als Fortsetz.
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 126. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 132. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme. Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe. — Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 140. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 144. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 148. } **einer Unbekannten.** Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc

Heft 150. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 154. } gaben, gelöst durch **geometr.**
„ 155. } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 157. } gaben, gelöst durch **algebr.**
} **Analysis.** (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

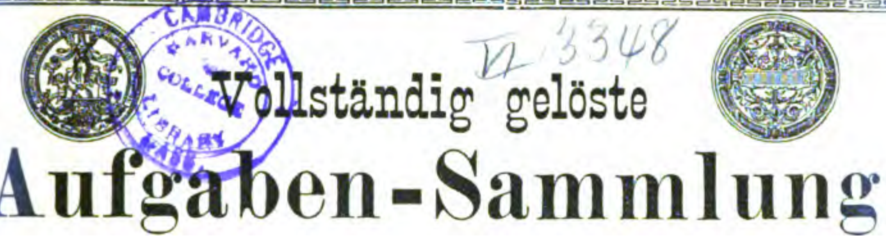
Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten impliciter Funktionen.

u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

107. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen. Forts. v. Heft 106. — Seite 97—112.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 106. — Seite 97—112.

Inhalt:

Gemischte praktische Aufgaben über die arithm. und geometr. Reihen — in vollständig gelöster Form. —

Stuttgart 1884.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3–4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik,** math. **Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.**

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dme **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung ehst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 42. In einer geometrischen Reihe ist die Summe aus dem ersten und letzten Gliede = — 2920, das Produkt aus diesen 2 Gliedern ist 11664 und die Summe aller Glieder ist = — 4372. Wie gross ist der Quotient, das erste und letzte Glied, und wie gross die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Formeln:

I. . . $t = aq^{n-1}$ (siehe Formel 1, Seite 18)

II. . . $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ („ „ 3, „ 19)

Auflösung. Bezeichnet man das 1te Glied der geometrischen Reihe mit x, den Quotienten mit y, die Anzahl der Glieder mit z und das letzte Glied mit v, so hat man nach vorstehender Formel I, die Gleichung:

1). . . . $v = xy^{z-1}$

Ferner hat man der Aufgabe gemäss und mit Berücksichtigung, dass das letzte Glied v nach Gleich. 1). $= xy^{z-1}$ ist und mit Benutzung der vorstehenden Formel II, die weiteren Bestimmungsgleichungen:

2). . . $x + xy^{z-1} = -2920$

3). . . $x \cdot xy^{z-1} = 11664$

4). . . $-4372 = \frac{xy^{z-1} \cdot y - x}{y - 1}$

Setzt man den sich aus Gleichung 2). für xy^{z-1} sich ergebenden Wert:

$$-2920 - x$$

in Gleichung 3). ein, so erhält man:

$$x \cdot (-2920 - x) = 11664$$

oder:

5). . . $x^2 + 2920x = -1164$

und aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 80 für das gesuchte Anfangsglied x der Reihe die Werte:

A). . . $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -2916 \end{cases}$

Da man nunmehr x kennt, so findet man die Unbekannte y aus den Gleichungen 3). und 4)., wie folgt:

Substituiert man den aus Gleichung 3). für y^{z-1} sich ergebenden Wert: $\frac{11664}{x^2}$ in Gleichung 4)., so resultiert:

Erkl. 80. Nebenstehende Gleichung:

5). . . $x^2 + 2920x = -11664$

nach x aufgelöst gibt der Reihe nach:

$$x^2 + 2920x + \left(\frac{2920}{2}\right)^2 = -11664 + \left(\frac{2920}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{2920}{2}\right)^2 = -11664 + \frac{2920^2}{4}$$

$$x + \frac{2920}{2} = \pm\sqrt{\frac{-11664 \cdot 4 + 2920^2}{4}}$$

$$x = -\frac{2920}{2} \pm \sqrt{\frac{-46656 + 8526400}{4}}$$

$$x = -\frac{2920}{2} \pm \sqrt{\frac{847,9744}{4}}$$

$$x = -\frac{2920}{2} \pm \frac{2912}{2}$$

mithin ist:

$$x_1 = -\frac{2920}{2} + \frac{2912}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

und

$$x_2 = -\frac{2920}{2} - \frac{2912}{2} = -\frac{5832}{2} = -2916$$

Erkl. 81. Setzt man in nebenstehender Gleichung:

6). . . $y = \frac{4372 + x}{\frac{11664}{x} + 4372}$

einmal $x = -4$, so erhält man:

$$y = \frac{4372 - 4}{\frac{11664}{-4} + 4372} = \frac{4368}{-2916 + 4372}$$

oder:

$$y = \frac{4368}{1456}$$

mithin ist der zu x_1 gehörige Wert für y:

a). . . . . . $y_1 = 3$

Setzt man in vorstehender Gleichung 6). ein andermal $x = -2916$, so erhält man:

$$y = \frac{4372 - 2916}{\frac{11664}{-2916} + 4372} = \frac{1456}{-4 + 4372}$$

$$y = \frac{1456}{4368}$$

mithin ist der zu x_2 gehörige Wert für y:

b). . . . . . $y_2 = \frac{1}{3}$

Erkl. 82. Setzt man in nebenstehender Gleichung 7).:

$$z = \log\left(\frac{11664}{x^2}\right) : \log y + 1$$

einmal: $x = -4$, $y = 3$

ein andermal: $x = -2916$, $y = \frac{1}{3}$

so erhält man zum erstenmal:

$$z = \log\left(\frac{11664}{(-4)^2}\right) : \log 3 + 1$$

oder:

$$z = \log\left(\frac{11664}{16}\right) : \log 3 + 1$$

$$z = \log 729 : \log 3 + 1$$

$$z = \frac{2{,}8627275}{0{,}4771213} + 1$$

$$z = 6 + 1 \text{ *)}.$$

mithin:

a). . . . . . . $z = 7$

Ferner erhält man zum zweitenmal:

$$z = \log\left(\frac{11664}{(-2916)^2}\right) : \log\frac{1}{3} + 1$$

oder:

$$z = \log\left(\frac{11664}{2916^2}\right) : \log\frac{1}{3} + 1$$

$$z = (\log 11664 - 2 . \log 2916) : \log 0{,}3333 \ldots . + 1$$

$$z = (4{,}0668475 - 2 . 3{,}4647875) : (0{,}5228744 - 1) + 1$$

$$z = (4{,}0668475 - 6{,}9295750) : -0{,}4771256 + 1$$

$$z = \frac{-2{,}8627275}{-0{,}4771256} + 1$$

$$z = 6 + 1 \text{ *)}.$$

mithin ebenfalls:

b). . . . . . $z = 7$

*). z muss, da sie die Anzahl der Glieder der Reihe vorstellt, stets eine ganze Zahl sein, dementsprechend wurde das sich aus den Divisionen ergebende Resultat abgerundet.

$$-4372 = \frac{x \cdot \frac{11664}{x^2} . y - x}{y - 1}$$

oder:

$$-4372y + 4372 = \frac{11664}{x} . y - x$$

$$\frac{11664}{x} . y + 4372y = 4372 + x$$

$$y . \left(\frac{11664}{x} + 4372\right) = 4372 + x$$

mithin ist:

6). . . . $y = \dfrac{4372 + x}{\frac{11664}{x} + 4372}$.

Setzt man in diese Gleichung die für x gefundenen Werte, so erhält man für den gesuchten Quotienten y der geometrischen Reihe nach der Erkl. 81 die Werte:

B). . . . $\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

Da man nunmehr x und y kennt, so findet man die Unbekannte z am besten wie folgt:

Aus Gleichung 3). erhält man:

$$y^{z-1} = \frac{11664}{x^2}$$

Logarithmiert man jetzt diese Exponentialgleichung, so ist:

$$(z - 1) . \log y = \log\left(\frac{11664}{x^2}\right)$$

oder:

$$z - 1 = \log\left(\frac{11664}{x^2}\right) : \log y$$

mithin:

7). . . $z = \log\left(\frac{11664}{x^2}\right) : \log y + 1$

Setzt man in diese Gleichung die für x und y gefundenen und zusammengehörigen Werte, so erhält man für die gesuchte Anzahl z der Glieder der Reihe nach der Erkl. 82:

C). . . . $z = 7$

Da man nunmehr x, y und z kennt, so findet man die Unbekannte r aus

Erkl. 88. Aus nebenstehender Gleichung:

8). . . . $v = -4 \cdot 3^{7-1}$

erhält man v, wie folgt:

$$v = -4 \cdot 3^6 = -4 \cdot 729$$

oder:

a). . . . $v = -2916$

Aus nebenstehender Gleichung:

9). . . . $v = -2916 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$

erhält man v, wie folgt:

$$v = -2916 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = -2{,}916 \cdot 0{,}33333^6$$

Da das Resultat ein negatives wird, so erhält man nach logarithm. Regeln (siehe *Kleyer's* Lehrbuch der „Logarithmen“, Zusatz 3, S. 65):

$$\log v = \log 2916 + 6 \cdot \log 0{,}33333 \text{ (n)}$$

Da nun: $\log 2916 = 3{,}4647875$

$+ 6 \cdot \log 0{,}33333 =$
$6 \cdot (0{,}5228744 - 1) = 3{,}1372464 - 6$

$\log v = 6{,}6020339 - 6$ (n)

oder: $\log v = 0{,}6020339$ (n)

mithin: 0274

numlog $v = 3{,}9997$ (n)

oder abgerundet: $v = -4$

der Gleich. 1)., wenn man in derselben die zusammengehörigen Werte für x und y den Wert für z substituiert, wie folgt:

Man erhält einmal:

8). . . . $v = -4 \cdot 3^{7-1}$ *).

ein andermal:

9). . . . $v = -2916 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$ *).

Für das gesuchte letzte Glied v der geometrischen Reihe erhält man hiermit nach der Erkl. 83 die Werte:

D). . . $\begin{cases} v_1 = -2916 \\ v_2 = -4 \end{cases}$

*). Das letzte Glied z hätte man auch auf einfache Weise durch die Betrachtung finden können, dass man für das Anfangsglied der gedachten Reihe die Werte: -4 und -2916 gefunden hat, d. h. je nachdem man die gedachte Reihe liest, ist das Anfangsglied $= -4$ oder $= -2916$, mithin ist das Endglied $= -2916$ oder $= -4$.

Aufgabe 43. In einer geometrischen Reihe von 8 Gliedern ist die Summe der ungeraden Glieder $= 1\frac{21}{64}$, die Summe der geraden Glieder $= \frac{85}{128}$. Wie gross ist der Quotient und das 1. Glied der Reihe?

Formel:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (siehe Formel 2, Seite 19).

Auflösung. Bezeichnet man das gesuchte Anfangsglied der Reihe mit x, den gesuchten Quotienten mit y, so ist die Reihe:

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy^3,\ xy^4,\ xy^5,\ xy^6,\ xy^7$$

Der Aufgabe gemäss hat man somit die Bestimmungsgleichungen:

1). $x + xy^2 + xy^4 + xy^6 = 1\frac{21}{64}$

2). $xy + xy^3 + xy^5 + xy^7 = \frac{85}{128}$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man x, wie folgt:

Scheidet man auf der linken Seite der Gleichung 1). den Faktor x und auf der linken Seite der Gleichung 2). den Faktor xy aus, so erhält man die Gleichungen:

3). . . . $x(1 + y^2 + y^4 + y^6) = \frac{85}{64}$

Erkl. 84. Aus nebenstehender Gleichung:

$$6). \quad x\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = \frac{85}{64}$$

erhält man x, wie folgt:

Die Glieder der in der Klammer stehenden Summe:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

bilden eine geometrische Reihe, da der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant ist. In dieser Reihe ist:

das Anfangsglied $a = 1$

der Quotient $q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

die Anzahl n der Glieder $= 4$

mithin hat man nach der Formel:

$$s = a\frac{q^n-1}{q-1}$$

für die Summe s der Glieder der Reihe:

$$s = 1.\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4-1}{\frac{1}{4}-1}$$

oder:

$$s = \frac{\frac{1}{4^4}-1}{\frac{1-4}{4}} = \frac{\frac{1-4^4}{4^4}}{\frac{1-4}{4}} = \frac{(1-4^4).4}{4^4(1-4)}$$

$$s = \frac{1-256}{4^3.-3} = \frac{-255}{-192}$$

mithin:

$$a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s = \frac{85}{64}$$

Obige Gleichung 6). geht somit über in:

$$x\cdot\frac{85}{64} = \frac{85}{64}$$

Man hat also:

$$x = \frac{85.64}{64.85}$$

oder: $x = 1$

$$4). \quad . \quad . \quad xy(1+y^2+y^4+y^6) = \frac{85}{128}$$

Substituiert man nun den aus Gleichung 3). für: $(1+y^2+y^4+y^6)$ sich ergebenden Wert: $\frac{85}{64.x}$ in Gleichung 4), so erhält man:

$$5). \quad . \quad . \quad xy\cdot\frac{85}{64.x} = \frac{85}{128}$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{85}{64}y = \frac{85}{128}$$

oder:

$$y = \frac{85.64}{128.85}$$

Der gesuchte Quotient y der Reihe ist hiernach:

$$A). \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{1}{2}$$

Setzt man diesen Wert für y in Gleichung 3). ein, so geht dieselbe über in:

$$6). \quad x\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = \frac{85}{64}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 84 für das gesuchte Anfangsglied x der Reihe:

$$x = 1$$

Aufgabe 44. Die Summe der ersten 6 Glieder einer geometrischen Reihe ist 189 und die Summe der folgenden 6 Glieder $= 12096$; welches ist die Reihe?

Formel:

$$s = a\frac{q^n-1}{q-1}$$ (siehe Formel 2, Seite 19).

Auflösung. Bezeichnet man das Anfangsglied der gesuchten Reihe mit x, den Quotienten derselben mit y, so besteht der Aufgabe gemäss für die ersten 6 Glieder der Reihe, wenn man in vor-

stehender Formel $s = 189$ und $n = 6$ setzt, die Gleichung:

1). . . $189 = x \cdot \frac{y^6 - 1}{y - 1}$

Da nun die folgenden 6 Glieder der gesuchten Reihe, für sich allein bestehend betrachtet, ebenfalls eine geometrische Reihe bilden, deren erstes Glied zugleich das 7. Glied der gesuchten Reihe, also $= x \cdot y^{7-1}$ oder $= xy^6$ ist, deren Quotient ebenfalls $= y$, deren Gliederzahl auch $= 6$ und deren Summe $= 12096$ ist, so hat man nach vorstehender Formel die weitere Gleichung:

2). . . $12096 = xy^6 \cdot \frac{y^6 - 1}{y - 1}$

Aus den Gleichungen 1). und 2). erhält man x und y, wie folgt:

Dividiert man Gleich. 1). in Gleich. 2)., so restiert die neue Gleichung:

$$\frac{12096}{189} = \frac{xy^6}{x} \text{ oder:}$$

3). . . $y^6 = \frac{12096}{189}$

Hieraus erhält man für den Quotienten y der gesuchten Reihe:

$$y = \pm\sqrt[6]{\frac{12096}{189}} = \pm\sqrt[6]{64} =$$

$$\pm\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

(siehe Erkl. 85)

also:

A). . . $\begin{cases} y_1 = +2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$

Substituiert man diese Werte für y in Gleichung 1)., so erhält man die Gleichungen:

4). . . $189 = x_1 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1}$ und

5). . . $189 = x_2 \cdot \frac{(-2)^6 - 1}{-2 - 1}$

Aus der Gleichung 4). erhält man:

$$189 = x_1 \cdot \frac{64 - 1}{1}$$

$$189 = 63 x_1$$

Erkl. 85. Die 6. Wurzel ergibt eigentlich sechs Wurzelwerte; zwei derselben sind die in nebenstehender Auflösung bestimmten Werte, die 4 anderen Werte sind imaginär und werden mittelst der Moivre'schen Formel bestimmt, oder man merke sich hierzu Folgendes:

Ist:

1). . . . $\sqrt[3]{1} = x$, so muss
$x^3 = 1$ oder:

2). . . . $x^3 - 1 = 0$ sein.

Da nun: $x - 1$ ein Faktor dieser Gleichung ist, indem

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

und $0 = 0 \cdot (x - 1)$ gesetzt werden kann, so ergibt: $x - 1 = 0$ gesetzt einen Wurzelwert der Gleichung, nämlich:

a). . . . $x_1 = 1$

Dividiert man nunmehr beide Seiten der Gleichung 2). durch $x - 1$, so restiert:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

und hieraus erhält man:

$$x^2 + x = -1$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{-4+1}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3}\right)$$

Hiernach bestehen die weiteren Wurzelwerte:

b). . . . $x_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ und

c). . . . $x_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

Es ist also:

A). . . . $\sqrt[3]{1} = 1$ und auch

B). . . . $\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ und auch

C). . . . $\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

Dementsprechend erhält man z. B. für

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{1 \cdot 64} = 4 \cdot \sqrt[3]{1}$$

die 3 Werte:

α). . . $\sqrt[3]{64} = 4.1 = 4$

β). . . $\sqrt[3]{64} = 4 \cdot \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = 2(-1+\sqrt{-3})$

γ). . . $\sqrt[3]{64} = 4 \cdot \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = 2(-1-\sqrt{-3})$

mithin erhält man für $\sqrt[6]{64}$ die nachstehenden 6 Werte:

δ). . . $\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{4} = \pm 2$

ε). $\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{2(-1+\sqrt{-3})} = \pm\sqrt{2(-1+\sqrt{-3})}$

ζ). $\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{2(-1-\sqrt{-3})} = \pm\sqrt{2(-1-\sqrt{-3})}$

Die vier imaginären Werte, welche sich für $\sqrt[6]{64}$ nach Vorstehendem ergeben, sind in nebenstehender Auflösung vernachlässigt, da eine Reihe, in welcher die Glieder imaginäre Grössen sind, für den praktischen Gebrauch meist doch ohne Bedeutung ist.

$$x_1 = \frac{189}{63}$$

$$x_1 = 3$$

Aus der Gleichung 5). erhält man:

$$189 = x_2 \cdot \frac{64-1}{-3}$$

$$189 = x_2 \cdot \frac{63}{-3}$$

$$189 = x_2 \cdot -21$$

$$x_2 = \frac{189}{-21}$$

$$x_2 = -9$$

Für das Anfangsglied x der Reihe hat man also die Werte:

B). . . . $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

Aus den für x und y gefundenen zusammengehörigen Werten ergeben sich also die gesuchten Reihen:

C). 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144

und

D). $-9, +18, -36, +72, -144, +288, -576, +1152, -2304, +4608, -9216, +18432$

Aufgabe 45. Die Summe aus dem 1ten und 5ten Gliede einer geometrischen Reihe ist 902, das Produkt derselben Glieder ist 9801; wie heisst das Anfangsglied und der Quotient der Reihe?

Formel: n^{te} Glied $= aq^{n-1}$

(siehe Antwort der Frage 4, Seite 18).

Auflösung. Bezeichnet man das gesuchte Anfangsglied mit x, den gesuchten Quotienten mit y, so hat man der Aufgabe gemäss und nach vorstehender Formel, mittelst der man das 5te Glied in x und y ausdrücken kann, die Gleichungen:

1). . . . $x + xy^4 = 902$

2). . . . $x \cdot xy^4 = 9801$

Setzt man den aus Gleichung 1). für xy^4 sich ergebenden Wert: $902 - x$ in Gleich. 2)., so erhält man die Gleichung:

$$x \cdot (902 - x) = 9801$$

oder:

Erkl. 86. Nebenstehende Gleichung:

3). . . . $x^2 - 902x = -9801$

nach x aufgelöst gibt der Reihe nach:

$$x^2 - 902x + \left(\frac{902}{2}\right)^2 = -9801 + \left(\frac{902}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{902}{2}\right)^2 = -9801 + \frac{813604}{4}$$

$$x - \frac{902}{2} = \pm\sqrt{\frac{-39204 + 813604}{4}}$$

$$x = \frac{902}{2} \pm \sqrt{774400}$$

oder:

$$x = \frac{902}{2} \pm \frac{880}{2}$$

Man findet somit für x die Werte:

a). $x_1 = \frac{902 + 880}{2} = \frac{1782}{2} = 891$

und

b). $x_2 = \frac{902 - 880}{2} = \frac{22}{2} = 11$

3). . . . $x^2 - 902x = -9801$

aus welcher man nach der Erkl. 86 für das gesuchte Anfangsglied x der Reihe die Werte:

A). . . . $\begin{cases} x_1 = 891 \text{ *)}. \\ x_2 = 11 \end{cases}$

findet.

Setzt man nunmehr die für x gefundenen Werte in Gleichung 2). ein, so erhält man den für $x_1 = 891$ zugehörigen Wert für y, wie folgt:

$$y^4 = \frac{9801}{891 \cdot 891} = \frac{11}{891} = \frac{1}{81}$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{1}{81}}} =$$

$$\pm\sqrt{\pm\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\pm 1}$$

mithin hat man für den gesuchten Quotienten y die Werte:

B). $\begin{cases} y_1 = +\frac{1}{3}\sqrt{+1} = +\frac{1}{3} \text{ *)}. \\ y_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{+1} = -\frac{1}{3} \\ y_3 = +\frac{1}{3}\sqrt{-1} = +\frac{1}{3}i \\ y_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{-1} = -\frac{1}{3}i \end{cases}$

ferner erhält man die für $x_2 = 11$ zugehörigen Werte für y, wie folgt:

$$y^4 = \frac{9801}{11 \cdot 11} = \frac{891}{11} = 81$$

$$y = \sqrt[4]{81} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{81}} =$$

$$\pm\sqrt{\pm 9} = \pm 3\sqrt{\pm 1}$$

mithin hat man für den gesuchten Quotienten y die weiteren Werte:

C). $\begin{cases} y_5 = +3\sqrt{+1} = +3 \\ y_6 = -3\sqrt{+1} = -3 \text{ *)}. \\ y_7 = +3\sqrt{-1} = +3i \\ y_8 = -3\sqrt{-1} = -3i \end{cases}$

*). Es existieren somit 8 Reihen, welche den in der Aufgabe gegebenen Bedingungen genügen; 4 derselben haben das Anfangsglied $x = 891$ und der Reihe nach die unter B). gefundenen Werte für y als Quotienten; die 4 anderen Reihen haben das Anfangsglied $x_2 = 11$ und der Reihe nach die unter C). gefundenen Werte für y als Quotienten.

Aufgabe 46. In zwei geometr. Reihen sind die 1. Glieder gleich, die Summe der 2. Glieder ist = 10, das 3. Glied der 1. Reihe ist dem absoluten Werte nach um 10 kleiner als das 3. Glied der 2. Reihe, das 4. Glied der 1. Reihe ist um 38 kleiner als das 4. Glied der 2. Reihe. Wie heissen diese Reihen?

Formel: n^{te} Glied $= aq^{n-1}$

(siehe Antwort der Frage 4, Seite 18).

Auflösung. Zur Auffindung der gesuchten Reihen muss man deren Anfangsglieder und deren Quotienten bestimmen.

Bezeichnet man das unbekannte Anfangsglied der 1. Reihe, also auch das der 2. Reihe mit x, den unbekannten Quotienten der 1. Reihe mit y, den der 2. Reihe mit z, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formel, die Bestimmungsgleichungen:

1). . . . $xy + xz = 10$

2). . . . $xy^2 = xz^2 - 10$

3). . . . $xy^3 = xz^3 - 38$

Diese Gleichungen reduziert, ergeben:

4). . . . $x(z+y) = 10$

5). . . . $x(z^2 - y^2) = 10$

6). . . . $x(z^3 - y^3) = 38$

Zur Bestimmung der Unbekannten x, y und z dividiere man die Gleichung 4). in Gleichung 5). und die Gleichung 5). in Gleichung 6).; hiernach restieren die Gleichungen:

7). . . $z = 1 + y$ (siehe Erkl. 87)

8). . . $\frac{z^2 + yz + y^2}{z + y} = \frac{19}{5}$ (s. Erkl. 88)

Substituiert man den Wert für z aus Gleichung 7). in Gleichung 8)., so ist:

$$\frac{(1+y)^2 + y(1+y) + y^2}{1 + y + y} = \frac{19}{5}$$

oder:

$$\frac{1 + 2y + y^2 + y + y^2 + y^2}{1 + 2y} = \frac{19}{5}$$

$$(3y^2 + 3y + 1) . 5 = (1 + 2y) . 19$$

$$15y^2 + 15y + 5 = 19 + 38y$$

$$15y^2 - 23y = 14$$

9). . . $y^2 - \frac{23}{15}y = \frac{14}{15}$

und aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 89 für den Quotienten y der 1. Reihe die Werte:

Erkl. 87. Dividiert man nebenstehende Gleichung:

4). . . . $x(z+y) = 10$

in die Gleichung:

5). . . . $x(z^2 - y^2) = 10$

so erhält man:

$$\frac{x(z^2 - y^2)}{x(z+y)} = \frac{10}{10}$$

oder:

$$\frac{x(z+y)(z-y)}{x(z+y)} = 1$$

mithin:

$$z - y = 1 \quad \text{oder:}$$

$$z = 1 + y$$

Erkl. 88. Dividiert man nebenstehende Gleichung:

5). . . . $x(z^2 - y^2) = 10$

in die Gleichung:

6). . . . $x(z^3 - y^3) = 38$

so erhält man:

$$\frac{x(z^3 - y^3)}{x(z^2 - y^2)} = \frac{38}{10}$$

oder:

$$\frac{x(z^3 - y^3)}{x(z+y)(z-y)} = \frac{19}{5}$$

Da nun:

$$(z^3 - y^3) : (z - y) = z^2 + yz + y^2 \text{ ist}$$

(siehe Kleyer's Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln, Seite 37)

so geht diese Gleichung über in:

$$\frac{x . (z-y) . (z^2 + yz + y^2)}{x(z-y) . (z+y)} = \frac{19}{5}$$

und hiernach erhält man:

$$\frac{z^2 + yz + y^2}{z + y} = \frac{19}{5}$$

Erkl. 89. Nebenstehende Gleichung:

$$9). \quad \ldots \quad y^2 - \frac{23}{15}y = \frac{14}{15}$$

nach y aufgelöst gibt der Reihe nach:

$$y^2 - \frac{23}{15}y + \left(\frac{23}{30}\right)^2 = \frac{14}{15} + \left(\frac{23}{30}\right)^2$$

$$\left(y - \frac{23}{30}\right)^2 = \frac{14.2.30}{15.2.30} + \frac{23^2}{30^2}$$

$$y - \frac{23}{30} = \pm\sqrt{\frac{840 + 529}{30^2}}$$

$$y = \frac{23}{30} \pm \sqrt{\frac{1369}{30^2}}$$

$$y = \frac{23}{30} \pm \frac{37}{30}$$

mithin ist:

$$y_1 = \frac{23}{30} + \frac{37}{30} = \frac{60}{30} = 2$$

$$y_2 = \frac{23}{30} - \frac{37}{30} = -\frac{14}{30} = -\frac{7}{15}$$

$$\text{A)}. \quad \ldots \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -\frac{7}{15} \end{cases}$$

In Rücksicht dieser für y gefundenen Werte erhält man aus Gleichung 7). für den Quotienten z der 2. Reihe, die Werte:

$$\text{B)}. \quad \ldots \quad \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = \frac{8}{15} \end{cases}$$

Substituiert man endlich die unter A). und B). gefundenen und zusammengehörigen Werte für y und z in Gleich. 1)., so erhält man:

$$x_1 . 2 + x_1 . 3 = 10 \quad \text{und}$$

$$x_2 \cdot -\frac{7}{15} + x_2 \cdot \frac{8}{15} = 10$$

und aus diesen Gleichungen erhält man für das Anfangsglied x der beiden Reihen, die Werte:

$$\text{C)}. \quad \ldots \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 150 \end{cases}$$

Aus den unter A)., B). und C). gefundenen Werten ergibt sich der Aufgabe gemäss, dass die gesuchten Reihen entweder:

2, 4, 8, 16, 32, 64, ... und

2, 6, 18, 54, 162, 486, ...

oder:

$150, \; -70, \; 32\frac{2}{3}, \; -15\frac{11}{45}, \ldots$ und

$150, \; 80, \; 42\frac{2}{3}, \; 22\frac{34}{45}, \ldots\ldots$ sind.

Aufgabe 47. Die unendliche Reihe:

$$x^{\frac{5}{2}} - ax + \frac{a^2}{\sqrt{x}} - \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^4}{x^{\frac{7}{2}}} - \ldots$$

(welche für bestimmte Werte von x konvergent ist) ist gegeben, man soll

1). die Summe sämtlicher Glieder dieser Reihe, und
2). die Summe von n Glieder dieser Reihe finden,

wenn man für x sich solche Werte denkt, welche die gegebene Reihe zu einer fallenden (konvergenten) Reihe machen.

Formeln:

$$\text{I.} \quad \ldots \quad s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (siehe Formel 2, Seite 19)

Ist q ein **echter Bruch** und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

$$\text{II.} \quad \ldots \quad s = \frac{a}{1 - q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21).

Auflösung. Die gegebene unendliche Reihe:

$$x^{\frac{5}{2}} - ax + \frac{a^2}{\sqrt{x}} - \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^4}{x^{\frac{7}{2}}} - \ldots$$

Erkl. 90. Nähern sich die Summen, welche man aus je einer gewissen Anzahl der Glieder einer Reihe bilden kann, um so mehr dem wahren Wert der Reihe, nämlich einer endlichen Zahl (oder der Null), je mehr Glieder der Reihe man summiert, so sagt man eine solche Reihe ist **konvergent**, und zwar im Gegensatz zu anderen Reihen, bei welchen dies nicht der Fall ist und **divergent** heissen.

Erkl. 91. Ist in einer unendlichen geometr. Reihe der Quotient ein **echter Bruch**, also werden die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe immer kleiner und kleiner, so ist eine solche Reihe **konvergent** (siehe Erkl. 90).

Erkl. 92. Nach der vorstehenden Formel II:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

erhält man, wenn $s = s_n$, $a = x^{\frac{5}{2}}$ und $q = -\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}$ gesetzt wird:

$$s_n = x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{\left(-\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^n - 1}{-\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}} - 1} \quad \text{oder:}$$

$$s_n = x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^n - 1}{-\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}} - 1}$$

denn man hat hier zu berücksichtigen, ob die Anzahl n der zu addierenden Glieder der Reihe eine gerade oder ungerade Zahl ist. Durch Reduktion erhält man ferner:

$$s_n = x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot \frac{a^n}{x^{\frac{3}{2}n}} - 1}{\frac{-a - x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}}$$

ist eine geometrische, da der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant, nämlich

$$= -\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}} \text{ ist.}$$

Ist nun dieser Quotient ein **echter Bruch**, ist also die gegebene Reihe **konvergent** (siehe die Erklärungen 90 u. 91), so kann man, da die Anzahl der Glieder unendlich ist, nach vorstehender Formel II die Summe s aller Glieder finden.

Denkt man sich hiernach für x solche Werte gesetzt, dass:

$$x^{\frac{3}{2}} > a, \quad \text{bezw. dass:}$$

$$x^3 > a^2 \quad \text{oder:}$$

$$\text{a)}. \; . \; . \; . \quad x > \sqrt[2]{a^2} \text{ ist,}$$

so ist der Quotient: $-\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}$ ein **echter Bruch** und man hat nach vorstehender Formel II für die gesuchte Summe s_∞ aller Glieder der gegebenen unendlichen Reihe:

$$s_\infty = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1 - \left(-\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}}\right)} \quad \text{oder:}$$

$$s_\infty = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1 + \frac{a}{x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + a} = \frac{x^4}{x^{\frac{3}{2}} + \ldots}$$

Unter der Voraussetzung, dass:

$$\text{a)}. \; . \; . \; . \quad x > \sqrt[3]{a^2}$$

hat man somit für die gesuchte Summe s_∞ aller Glieder der unendlichen Reihe:

$$\text{A)}. \; . \; . \; . \quad s_\infty = \frac{x^4}{a + \sqrt{x^3}}$$

Setzt man in vorstehender Formel I:

$a = x^{\frac{5}{2}}$, $q = -\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}}$ und $s = s_n$, so

$$s_n = \frac{x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}n}} \cdot \frac{(-1)^n a^n - x^{\frac{3}{2}n}}{-a - x^{\frac{3}{2}}}$$

$$s_n = x^{4-\frac{3}{2}n} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}n} - (-1)^n a^n}{x^{\frac{3}{2}} + a}$$

hat man unter derselben Voraussetzung, dass:

$$x > \sqrt[3]{a^2}$$

für die gesuchte Summe s_n von n Glieder der unendlichen gegebenen Reihe:

$$\text{B). . } s_n = x^{4-\frac{3}{2}n} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}n} - (-1)^n a^n}{x^{\frac{3}{2}} + a}$$

(siehe Erkl. 92.)

Aufgabe 48. Man addiere:

1). $2n$ Glieder und

2). $2n+1$ Glieder

der algebraischen Summe:

$1 - x^3 + x^7 - x^{10} + x^{14} - x^{17} + x^{21} - \ldots.$

Wie gross ist ferner diese Summe, wenn $x < 1$ ist und der gegebene Ausdruck kein Ende hat?

Formeln:

$$\text{I. . . } s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (siehe Formel 2, Seite 19).

Ist q ein echter Bruch und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

$$\text{II. . . } s = \frac{a}{1-q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21).

Erkl. 93. In der nebenstehenden geometrischen Reihe:

a). . . $1 + x^7 + x^{10} + x^{21} + \ldots.$

ist das Anfangsglied $a = 1$

der Quotient $q = x^7$

somit hat man für die Summe s_n der n ersten Glieder dieser Reihe nach der nebenstehenden Formel I:

$$s = 1 \cdot \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1} \quad \text{oder:}$$

$$s = \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1}$$

Erkl. 94. In der nebenstehenden geometrischen Reihe:

b). . . $-x^3 - x^{10} - x^{17} - x^{24} - \ldots.$

ist das Anfangsglied $a = -x^3$

der Quotient $q = x^7$

somit hat man für die Summe s_n der n ersten Glieder dieser Reihe nach der nebenstehenden Formel I:

$$s = -x^3 \cdot \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1}$$

Auflösung. Die **ungeraden** Glieder der gegebenen algebraischen Summe:

$$1 - x^3 + x^7 - x^{10} + x^{14} - x^{17} + x^{21} - x^{24}$$

bilden in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

a). . . $1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \ldots.$

während die **geraden** Glieder jener Summe in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

b). . . $-x^3 - x^{10} - x^{17} - x^{24} - \ldots.$

bilden.

Soll man nun die Summe S_{2n} von $2n$, also von einer **geraden Anzahl** Glieder der gegebenen algebraischen Summe bestimmen, so beachte man, dass diese Summe aus den n ersten Gliedern der geometrischen Reihe a). und aus den n ersten Gliedern der geometr. Reihe b). besteht. Nach den Erkl. 93 u. 94 hat man somit:

$$S_{2n} = \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1} - x^3 \cdot \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1}$$

oder:

$$\text{A). } S_{2n} = (1 - x^3) \cdot \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1}$$

Soll man ferner die Summe S_{2n+1} von $2n+1$ Glieder, also von einer **ungeraden Anzahl** Glieder der gegebenen

Erkl. 95. Da, wie in der Erkl. 93 gezeigt wurde, die Summe s_n der n ersten Glieder der umstehenden Reihe:

a). . . $1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \ldots$

$= \dfrac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1}$ ist und nach der allgem. Formel:

$n = aq^{n-1}$ (siehe Antw. d. Frage 14, Seite 18)

das $(n+1)^{\text{ste}}$ Glied dieser Reihe $=$

$$1 . (x^7)^{n+1-1} = x^{7n} \text{ ist,}$$

so hat man für die Summe s_{n+1} der $(n+1)$ ersten Glieder dieser Reihe:

$$s_{n+1} = \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1} + x^{7n}$$

algebraischen Summe bestimmen, so beachte man, dass diese Summe aus den $n+1$ ersten Gliedern der geometrischen Reihe a). und aus den n ersten Gliedern der geometrischen Reihe b). besteht.

Nach den Erkl. 93 und 95 hat man somit:

$$S_{2n+1} = \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1} + x^{7n} - x^3 \cdot \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1}$$

oder:

B). $$S_{2n+1} = (1 - x^3) \cdot \frac{x^{7n} - 1}{x^7 - 1} + x^{7n}$$

Wird schliesslich angenommen, dass die Anzahl der Glieder der gegebenen Summe **unendlich** gross ist, so sind auch die geometrischen Reihen a). und b). unendliche Reihen, und da in diesem Fall $x < 1$ angenommen werden soll, so sind diese beiden Reihen **fallende** geometrische (nämlich konvergierende) Reihen.

Da man nun nach der vorstehenden Formel II für die Summe s der Reihe a).:

$$s = \frac{1}{1 - x^7}$$

und für die Summe s_1 der Reihe b).:

$$s_1 = \frac{-x^3}{1 - x^7}$$

erhält, so ist die Summe S_∞ der gegebenen algebraischen Summe für den gedachten Fall, nämlich dass die Anzahl der Glieder ∞ und $x <$ ist:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - x^7} + \frac{-x^3}{1 - x^7}$$

oder:

C). $$S_\infty = \frac{1 - x^3}{1 - x^7}$$

Aufgabe 49. Wenn das 90ste Glied einer geometrischen Reihe $= 1200$ und das 30ste Glied $= 120$ ist, wie gross ist alsdann das 50ste Glied?

Formel: n^{te} Glied $= aq^{n-1}$
(siehe Antw. der Frage 14, Seite 18)

Auflösung. Bezeichnet man mit x das unbekannte Anfangsglied, mit y den unbekannten Quotienten der gedachten Reihe, so ist nach vorstehender Formel das 90ste Glied $= x . y^{89}$, das 30ste Glied $= x . y^{29}$ und das gesuchte 50ste Glied :

$= xy^{49}$, somit bestehen der Aufgabe gemäss die Bestimmungsgleichungen:

1). . . $xy^{89} = 1200$

2). . . $xy^{29} = 120$

3). . . $z = xy^{49}$

Zur Berechnung des gesuchten 50sten Gliedes z verfahre man, wie folgt:

Gleichung 2). in Gleichung 1). dividiert, gibt:

$$\frac{xy^{89}}{xy^{29}} = \frac{1200}{120} \text{ oder:}$$

$$y^{89-29} = 10$$

$$y^{60} = 10, \text{ mithin ist:}$$

4). . . $y = \sqrt[60]{10}$

Substituiert man diesen Wert für y in Gleichung 2)., so erhält man:

$$x(\sqrt[60]{10})^{29} = 120 \text{ oder:}$$

5). . . $x = \dfrac{120}{\sqrt[60]{10^{29}}}$

Aus den Gleichungen 3)., 4). und 5). ergibt sich sonach:

$$z = \frac{120}{\sqrt[60]{10^{29}}} \cdot (\sqrt[60]{10})^{49} \text{ oder:}$$

$$z = 120 \cdot \frac{\sqrt[60]{10^{49}}}{\sqrt[60]{10^{29}}}$$

$$z = 120\sqrt[60]{\frac{10^{49}}{10^{29}}} = 120\sqrt[60]{10^{20}}$$

mithin:

6). . . $z = 120\sqrt[3]{10}$

Nach nebenstehender Hülfsrechnung erhält man hiernach für das gesuchte 50ste Glied z:

$$z = 258{,}5321\ldots.$$

Hülfsrechnung.

$$\log z = \log 120 + \frac{1}{3}\log 10$$

Nun ist: $\log 10 = 1{,}0000000$
$\cdot \frac{1}{3}$

$0{,}3333333$

$+\log 120 = +2{,}0791812$

$\log z = 2{,}4125145$

5109
86
83,6
2,4

mithin ist:

$numlog\ z = 258{,}5321\ldots.$

Aufgabe 50. Eine geometrische Progression besteht aus 3 Glieder; das Produkt derselben ist 216, die Summe ihrer Kuben = 1917. Wie heisst diese Reihe?

Erkl. 96. In der Erkl. 85, Seite 101 ist dargethan, dass:

$\sqrt[3]{1}$ **erstens** $= 1$

zweitens $= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ und

drittens $= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ ist.

In analoger Weise erhält man, da

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{216\cdot+1} = \sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{+1} = 6\cdot\sqrt[3]{+1} \text{ ist}$$

für $\sqrt[3]{216}$

erstens $= 6\cdot\sqrt[3]{+1} = 6\cdot 1 = 6$

zweitens $= 6\cdot\sqrt[3]{+1} = 6\cdot\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = 3(-1+\sqrt{-3})$

und

drittens $= 6\cdot\sqrt[3]{+1} = 6\cdot\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = 3(-1-\sqrt{-3})$

Erkl. 97. Nebenstehende Gleichung:

2). . . $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + x^3 + (xy)^3 = 1971$

nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x^3}{y^3} + x^3 + x^3y^3 = 1971$$

$$x^3 + x^3y^3 + x^3y^6 = 1971y^3$$

$$x^3y^6 + x^3y^3 - 1971y^3 = -x^3$$

$$y^6 + \frac{x^3-1971}{x^3}\cdot y^3 = -1$$

Denkt man sich $y^3 = z$, also $y^6 = z^2$ gesetzt, so ist:

$$z^2 + \frac{x^3-1971}{x^3}\cdot z = -1$$

$$z^2 + \frac{x^3-1971}{x^3}\cdot z + \left(\frac{x^3-1971}{2x^3}\right)^2 = -1 + \left(\frac{x^3-1971}{2x^3}\right)^2$$

$$\left(z + \frac{x^3-1971}{2x^3}\right)^2 = -1 + \left(\frac{x^3-1971}{2x^3}\right)^2$$

oder:

$$y^3 = z = -\frac{x^3-1971}{2x^3} \pm \sqrt{-1+\left(\frac{x^3-1971}{2x^3}\right)^2}$$

mithin:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3-1971}{2x^3} \pm \sqrt{-1+\left(\frac{x^3-1971}{2x^3}\right)^2}}$$

Auflösung. Zur Aufstellung der gesuchten Reihe drückt man die Glieder derselben am besten **symmetrisch** wie folgt aus:

Bezeichnet man das mittelste (das 2te Glied) der Reihe mit x, den unbekannten Quotienten derselben mit y, so ist das 3te Glied $= x\cdot y$ und das 1ste Glied $= \frac{x}{y}$, die geometrische Reihe ist also allgemein dargestellt:

α). . . . $\frac{x}{y},\ x,\ xy$

Zur Bestimmung der Grössen x und y bestehen der Aufgabe gemäss somit die Gleichungen:

1). . . $\frac{x}{y}\cdot x\cdot xy = 216$

2). . . $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + x^3 + (xy)^3 = 1971$

Aus Gleichung 1). erhält man:

3). . . $x^3 = 216$ mithin:

$$x = \sqrt[3]{216} \text{ oder:}$$

A). . . $x = 6$ (man beachte auch die Erkl. 96).

Da somit x bekannt ist, löse man die Gleichung 2). nach y auf.

Nach der Erkl. 97 erhält man:

4). $y = \sqrt[3]{-\frac{x^3-1971}{2x^3} \pm \sqrt{-1+\left(\frac{x^3-1971}{2x^3}\right.}}$

Substituiert man hierin den in Gleichung 3). für x^3 gefundenen Wert, so erhält man:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{216-1971}{2\cdot 216} \pm \sqrt{-1+\left(\frac{216-1971}{2\cdot 216}\right.}}$$

oder:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{-1755}{432} \pm \sqrt{-1+\frac{(-1755)^2}{432^2}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1755}{432} \pm \sqrt{\frac{-432^2+3080025}{432^2}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1755}{432} \pm \sqrt{\frac{-186624+3080025}{432^2}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1755}{432} \pm \frac{1701}{432}}$$

sonach ist:

$$\text{B).}\quad \begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{\dfrac{3456}{432}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{(s. Erkl. 98)} \\ y_2 = \sqrt[3]{\dfrac{54}{432}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{216}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(siehe Erkl. 98)

Aus den unter A). und B). für x und y gefundenen Werten ergibt sich, dass nach der unter α). allgemein dargestellten Reihe, die gesuchte Reihe entweder:

$$\text{C).} \ldots \begin{cases} 3, \; 6, \; 12 \text{ oder:} \\ 12, \; 6, \; 3 \text{ ist.*)}. \end{cases}$$

Erkl. 98. Analog wie in der Erkl. 96 gezeigt ist, erhält man für

$$y_1 = \sqrt[3]{8} \text{ erstens } = 2$$
$$\text{zweitens } = 2 \cdot \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$$
$$= (-1+\sqrt{-3})$$
$$\text{und drittens } = 2 \cdot \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$$
$$= (-1-\sqrt{-3})$$

ebenso erhält man für

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{27}{216}} \text{ erstens } = \frac{1}{2}$$
$$\text{zweitens } = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$$
$$= \frac{1}{4}(-1+\sqrt{-3})$$
$$\text{und drittens } = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$$
$$= \frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})$$

*). Es bestehen noch weitere **sechszehn** Reihen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, in welchen aber die Glieder **imaginäre** Zahlen sind. Denn nach der Erkl. 96 erhält man für x noch die weiteren Werte:

$$3(-1+\sqrt{-3}) \text{ und } 3(-1-\sqrt{-3})$$

welche nach der unter α). **allgemein** dargestellten Reihe mit den unter B). für y gefundenen Werte verbunden, **vier** weitere Reihen ergeben.

Ferner erhält man nach der Erkl. 98 für y_1 noch die weiteren Werte:

$$(-1+\sqrt{-3}),\; (-1-\sqrt{-3})$$

und für y_2 die weiteren Werte:

$$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{-3}) \text{ und } \frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})$$

Jede dieser **vier** weiteren Werte für y mit den **drei** Werten, welche sich nach der Erkl. 96 für x, bezw. für $\sqrt[3]{216}$ ergeben, verbunden, ergeben nach der unter α). allgemein dargestellten Reihe, zusammen noch **zwölf** weitere Reihen. Im Ganzen genügen also der Aufgabe 18 Reihen. Wie die gefundenen Reihen unter C). nur **Umkehrungen** von einander sind, so sind von den 18 Reihen 9 davon Umkehrungen der 9 übrigen Reihen

---

Aufgabe 51. Die Zahl 20045 soll so in 5 Teilen zerlegt werden, dass sich jeder dieser Teile zu seinem nächstfolgenden wie 2 : 3 verhält.

Formel:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{(siehe Formel 8, Seite 19).}$$

Auflösung. Bezeichnet man den 1[ten] der gesuchten Teile mit x, so ist der Aufgabe gemäss der 2. Teil $= \frac{3}{2}x$,

der 3. Teil $= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 x$,

der 4. Teil $= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 x$

und analog der 5. Teil $= \left(\frac{3}{2}\right)^4 x$

(siehe Erkl. 99.)

Die gesuchten Teile bilden somit in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

1). $x, \; \frac{3}{2}x, \; \left(\frac{3}{2}\right)^2 x, \; \left(\frac{3}{2}\right)^3 x, \; \left(\frac{3}{2}\right)^4 x$ *).

In dieser Reihe ist:

das Anfangsglied $a = x$

der Quotient $q = \frac{3}{2}$

die Anzahl n der Glieder $= 5$ und

die Summe $s = 20045$.

Nach vorstehender Formel hat man somit die Bestimmungsgleichung:

2). . . $20045 = x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

und aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 100 für den 1. Teil x:

A). . . $x = 1520$

Nach obiger Reihe 1). erhält man somit für den 2. Teil:

B). . . $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} . 1520 = 2280$

für den 3. Teil:

C). . . $\left(\frac{3}{2}\right)^2 x = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} x = \frac{3}{2} \cdot 2280 = 3420$

für den 4. Teil:

D). . . $\left(\frac{3}{2}\right)^3 x = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 x = \frac{3}{2} \cdot 3420 = 5130$

und für den 5. Teil:

E). . . $\left(\frac{3}{2}\right)^4 x = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 x = \frac{3}{2} \cdot 5130 = 7695$

*). Die Auflösung der Aufgabe kann auch auf einfache Weise mittelst **laufenden Proportionen** (man siehe dieses Kapitel) geschehen.

Erkl. 99. Ist der 1. Teil $= x$, der 2. $= y$, so soll die Proportion stattfinden:

$$x : y = 2 : 3$$

mithin ist:

$$2y = 3x \quad \text{oder:}$$

a). . . . . $y = \frac{3}{2}x$

Bezeichnet man ferner den 3. Teil mit z, so soll die Proportion stattfinden:

$$y : z = 2 : 3$$

Da nun $y = \frac{3}{2}x$ ist, so erhält man hiernach:

$$\frac{3}{2}x : z = 2 : 3 \quad \text{oder:}$$

$$2z = 3 \cdot \frac{3}{2}x \quad \text{mithin:}$$

$$z = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 x \quad \text{u.s.f.}$$

Erkl. 100. Nebenstehende Gleichung:

2). . . $20045 = x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$20045 = x \cdot \frac{\frac{3^5 - 2^5}{2^5}}{\frac{3-2}{2}}$$

$$20045 = x \cdot \frac{(3^5 - 2^5) . 2}{(3 - 2)\, 2^5}$$

$$20045 = x \cdot \frac{243 - 32}{1 . 2^4}$$

$$20045 = x . \frac{211}{16}$$

$$x = \frac{20045 . 16}{211} = 95 . 16$$

mithin:

$$x = 1520$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } **Rentenrechnung** als Fortsetz.
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. **Körperberechnungen.** 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. **Rentenrechnung.** — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. **Körperberechnungen.** 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 126. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 132. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. **Körperberechnungen.** 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. **Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 140. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortsaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 144. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 148. } **einer Unbekannten.** Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. **Magnetismus und Elektrizität.**

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 154. } **gaben, gelöst durch geometr.**
„ 155. } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 157. } **gaben, gelöst durch algebr.**
} **Analysis.** (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. **Trigonometrie.** (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten implizieter Funktionen.

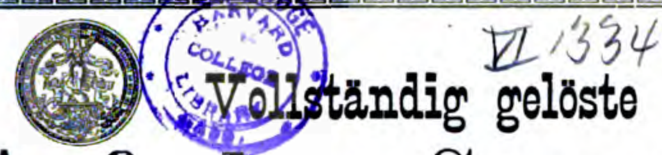
u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

108. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Forts. von Heft 107. Seite 113—128 mit 7 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Forts. v. Heft 107. Seite 113—128 mit 7 Figuren.

Inhalt:
Gemischte praktische Aufgaben über die arithmetischen und geometrischen Reihen in vollständig gelöster Form, aus den Gebieten der Planimetrie, Stereometrie und Physik, mit vielen Erklärungen.

c. **Stuttgart 1884.**
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und **alsdann** auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und **vielleicht vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16,** entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 52. Schneiden sich n gerade Linien in einem Punkte unter lauter gleichen Winkeln, und fällt man von einem beliebigen Punkte der einen Linie auf die nächste ein Perpendikel, von dessen Fusspunkt auf die folgende wieder ein Perpendikel u. s. f. bis in's Unendliche, so entsteht eine gebrochene Schneckenlinie, deren Länge in die Länge a des zuerst gefällten Perpendikels ausgedrückt werden soll.

Figur 6.

Erkl. 101. Für den speziellen Fall, dass $\alpha = 60^0$ ist, erhält man, da $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ist (siehe Erkl. 17, Seite 49):

$$X = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a}{\frac{2-1}{2}} = 2a$$

d. h. die Summe aller Perpendikel ist = dem doppelten ersten Perpendikel.

Erkl. 102. Will man die Länge der gebrochenen Schneckenlinie graphisch darstellen, so setze man in den für X gefundenen Wert:

$$X = \frac{a}{1 - \cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{m}{c}$$ (siehe Figur 6).

Hiernach erhält man:

$$X = \frac{a}{1 - \frac{m}{c}} = \frac{a}{\frac{c-m}{c}}$$

oder:

Formeln:

I. . . . $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (siehe Formel 2, S. 19)

Ist q ein echter Bruch und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

II. . . . $s = \frac{a}{1 - q}$ (siehe Formel 4, S. 21).

Auflösung. Die gesuchte Länge X der gebrochenen Schneckenlinie besteht, siehe Fig. 6, aus der Summe der Längen der Strecken $a, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ *infinitum.* Man hat somit die Gleichung:

1). $X = a + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots inf.$

Da nun:

$x_1 = m \cdot \sin\alpha$

$x_2 = m_1 \cdot \sin\alpha$

$x_3 = m_2 \cdot \sin\alpha$ u. s. f.

und $m = a \cdot ctg\,\alpha$

$m_1 = m \cdot \cos\alpha$, also auch $= a \cdot ctg\,\alpha \cdot \cos\alpha$

$m_2 = m_1 \cdot \cos\alpha$, also auch $= a \cdot ctg\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha$ u. s. f.,

mithin:

$$x_1 = a \cdot ctg\,\alpha \cdot \sin\alpha = a \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = a \cdot \cos\alpha$$

$$x_2 = a \cdot ctg\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = a \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = a \cdot \cos^2\alpha$$

$$x_3 = a \cdot ctg\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = a \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha = a \cdot \cos^3\alpha$$

und analog:

$x_4 = a \cdot \cos^4\alpha$

$x_5 = a \cdot \cos^5\alpha$ u. s. f. ist,

so erhält man:

$$X = a + a \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos^2\alpha + a \cdot \cos^3\alpha + a \cdot \cos^4\alpha + \ldots$$

oder:

2). $X = a\,(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots\ldots)$

Da nun die Glieder in der Klammer in ihrer Aufeinanderfolge eine geome-

$$X = \frac{a c}{c - m}$$

mithin:

$$x . (c - m) = a . c \quad \text{und}$$

$$(c - m) : a = a : x$$

d. h. man konstruiere die 4te Proportionale zwischen $(c - m)$, a und c.

Erkl. 108. Sind die gleichen Winkel α gross, wie in Figur 6, so stellt die gebrochene Schneckenlinie das Bild einer **sehr schnell konvergierenden** (sehr schnell fallenden geometrischen) Reihe dar, indem die einzelnen Perpendikel sehr rasch kleiner und kleiner werden und somit sich auf rasche Weise der bestimmten Grenze Null nähern.

Sind hingegen die gleichen Winkel α sehr klein, so stellt die gebrochene Schneckenlinie das Bild einer nur **langsam** konvergierenden Reihe dar.

Diese Betrachtung stimmt mit der Reihe:

$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots\ldots$$

überein, denn ist α ein grosser Winkel, so ist $\cos\alpha$ ein sehr kleiner Wert (ein sehr kleiner echter Bruch), dessen aufeinanderfolgenden Potenzen somit sehr rasch kleiner und kleiner werden und sich der Grenze Null nähern. — Ist hingegen α ein kleiner Winkel, so ist der $\cos\alpha$ der Einheit sehr nahe und die aufeinanderfolgenden Potenzen von $\cos\alpha$ werden allerdings auch stets kleiner (da $\cos\alpha$ ein echter Bruch ist), nähern sich aber nicht in so **rascher Weise** der Grenze Null. (Man siehe auch das Kapitel: **Die Goniometrie.**)

trische Reihe bilden, deren Anfangsglied $a = 1$, deren Gliederzahl $n = \infty$ und deren Quotient $q = \cos\alpha$ ist und dieser Quotient ein **echter Bruch** (siehe Erkl. 16, Seite 48), also die Reihe eine fallende (eine konvergierende) Reihe ist, so hat man für die Summe s dieser Glieder nach der vorstehenden Formel II:

$$3). \quad . \quad . \quad s = \frac{1}{1 - \cos\alpha}$$

Somit ist die gesuchte Länge X sämtlicher Perpendikel:

$$X = a \cdot \frac{1}{1 - \cos\alpha}$$

oder:

$$A). \quad . \quad . \quad X = \frac{a}{1 - \cos\alpha}$$

(Man beachte auch die Erklärungen 101, 102 u. 103.)

Aufgabe 53. Zur Spitze einer Muschel läuft eine Schneckenlinie hinauf. Die Windungen dieser Schneckenlinie befinden sich auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels und liegen so, dass sie um den Kegel herum stets auf dem kürzesten Weg zu der nach dem Ausgangspunkt der ersten Windung zu ziehenden Seitenlinie des Kegels kommen. Wie lang ist diese aus unzähligen Windungen bestehende Schneckenlinie, wenn die Seite des Kegels s und der Radius seines Grundkreises r ist?

Wie lang ist die Schneckenlinie

a). bei der *Terebra pura*, bei welcher nach *Desh*'s Angaben $s = 34$ mm und $r = 4{,}5$ mm ist, und

b). bei einem *Trochus maximus*, bei welchem nach *Koch*'s Angaben $s = 10$ cm und $r = 4{,}3$ mm sein soll?

Formeln:

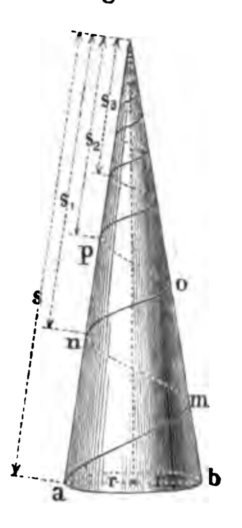
$$I. \quad . \quad . \quad s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{(siehe Formel 2, S. 19)}$$

Ist q ein echter Bruch und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

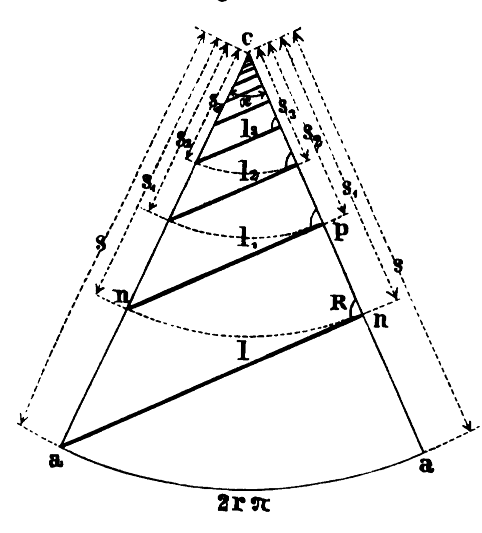
$$II. \quad . \quad . \quad s = \frac{a}{1 - q} \quad \text{(siehe Formel 4, S. 21.)}$$

Auflösung. Die in der Aufgabe erwähnte Muschel hat die Form des in der Figur 7 dargestellten geraden Kreiskegels. Wird der Mantel dieses Kegels mit der darauf befindlichen Schneckenlinie in eine Ebene entrollt, so erhält man den in Figur 8 dargestellten Kreissektor $a a c$, dessen Bogen $a a$ gleich der Peripherie $2 r \pi$ des Grundkreises des Kegels und dessen Radius $c a$ $(= c b) =$ der Seitenlinie s des Kegels ist.

Figur 7.



Figur 8.



Für den diesem Sektor zugehörigen Centriewinkel α erhält man nach der Erkl. 104:

1). . . $\alpha = \frac{r}{s} . 360^0$

Da nun jede einzelne Windung der Schneckenlinie, z. B. die erste Windung *amn*, siehe Figur 7, von ihrem Anfangspunkte *a* bis zu ihrem Endpunkte *n* den **kürzesten** Weg auf der Mantelfläche des Kegels beschreiben soll, so muss diese Windung in der in einer Ebene entrollten Mantelfläche des Kegels, siehe Figur 8, **gleich dem** von *a* auf *ca* gefällten **Perpendikel** *an* sein, das gleiche gilt von der 2ten Windung *nop* und von jeder weiteren Windung.

Bezeichnet man nun das Stück der Seitenlinie s des Kegels, siehe Figur 7, bezw. das Stück des Radius s des Kreissektors, siehe Figur 8, vom Ende der 1ten Windung (d. i. zugleich der Anfang der 2ten Windung) mit s_1, das analoge Stück der 2ten (bezw. der 3ten) Windung mit s_2 u. s. f., wie in den Figuren angedeutet ist, so hat man in dem rechtwinkligen Dreieck *anc*:

2). . . $s_1 = s . \cos\alpha$ (siehe Erkl. 105)

ferner hat man in dem rechtwinkligen Dreieck *npc*:

$$s_2 = s_1 . \cos\alpha$$

oder in Rücksicht der Gleichung 2).:

3). . . $s_2 = s . \cos^2\alpha$

In analoger Weise erhält man:

$$s_3 = s_2 . \cos\alpha$$

oder in Rücksicht der Gleichung 3:

4). . . $s_3 = s . \cos^3\alpha$, ebenso:

5). . . $s_4 = s . \cos^4\alpha$ u. s. f., u. s. f.

Bezeichnet man ferner die Längen der einzelnen Windungen, wie in Fig. 8 angedeutet ist, der Reihe nach mit l, l_1, l_2, l_3, l_4, ..., so hat man in dem rechtwinkligen Dreieck *anc*:

6). . . $l = s . \sin\alpha$

dann hat man in dem rechtwinkligen Dreieck *npc*:

$l_1 = s_1 . \sin\alpha$ oder in Rücksicht der vorstehenden Gleichung 2).:

Erkl. 104. Da der Bogen aa des Kreissektors aac, siehe Figur 8, gleich dem Umfang $2r\pi$ des Grundkreises des Kegels ist und da ferner der Umfang des Kreises, zu dem der Sektor aac gehört, $= 2s\pi$ ist, so hat man zur Berechnung des Centriewinkels α nach dem planimetrischen Satze:

„Bogen eines und desselben Kreises verhalten sich wie die denselben zugehörigen Centriewinkeln“

die Proportion:

$$2s\pi : 2r\pi = 360^0 : \alpha^0$$

und hieraus erhält man:

$$\alpha = \frac{2r\pi}{2s\pi} \cdot 360^0 \quad \text{oder:}$$

$$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360^0$$

Erkl. 105. In dem rechtwinkligen Dreieck anc, siehe Figur 8, besteht die Relation:

$$\cos\alpha = \frac{s_1}{s}$$

und hieraus folgt:

$$s_1 = s \, . \cos\alpha$$

Erkl. 106. In dem rechtwinkligen Dreieck anc, siehe Figur 8, besteht die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{l}{s}$$

und hieraus folgt:

$$l = s \, . \sin\alpha$$

Erkl. 107. Zwischen dem Sinus eines Winkels α und dem Sinus und Kosinus des halben Winkels besteht die Relation:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

Man siehe das Kapitel: **Die Goniometrie.**

Erkl. 108. Zwischen dem Kosinus eines Winkels und dem Sinus des halben Winkels besteht die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

7). . . $l_1 = s \, . \cos\alpha \, . \sin\alpha$

In analoger Weise erhält man:

$l_2 = s_2 \, . \sin\alpha$ oder in Rücksicht der vorstehenden Gleichung 3).:

8). . . $l_2 = s \, . \cos^2\alpha \, . \sin\alpha$, ebenso:

9). . . $l_3 = s \, . \cos^3\alpha \, . \sin\alpha$,

10). . . $l_4 = s \, . \cos^4\alpha \, . \sin\alpha$ u.s.f., u.s.f.

Da nun die gesuchte Länge x der ganzen Schneckenlinie aus der Summe der Längen der einzelnen Windungen besteht, so hat man zur Bestimmung der Länge x nach vorstehenden Gleichungen 6). bis 10). die Gleichung:

11). $x = s \, . \sin\alpha + s \, . \cos\alpha\sin\alpha + s \, . \cos^2\alpha\sin\alpha + s \, . \cos^3\alpha\sin\alpha + s \, . \cos^4\alpha\sin\alpha + \ldots\ldots inf.$

Aus dieser Gleichung erhält man x auf folgende Weise:

Durch Ausscheiden des gemeinschaftlichen Faktors $s \, . \sin\alpha$ erhält man zunächst:

12). $x = s \, . \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots\ldots inf.)$

Da nun die in der Klammer stehende Summe:

$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots$$

eine geometrische Reihe vorstellt, deren Anfangsglied $a = 1$, deren Gliederzahl $n = \infty$ und deren Quotient $= \cos\alpha$, also nach der Erkl. 16, Seite 48, ein echter Bruch ist, so hat man nach vorstehender Formel II für die Summe s der Glieder dieser fallenden unendlichen (konvergierenden) Reihe:

$$s = \frac{1}{1-\cos\alpha}$$

Vorstehende Gleichung geht somit über in:

$$x = s \, . \sin\alpha \cdot \frac{1}{1-\cos\alpha}$$

oder in:

$$x = s \cdot \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Diese Gleichung kann man nunmehr zur logarithmischen Rechnung bequem machen, wenn man

Erkl. 109. Setzt man in dem Ausdruck:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \text{ (siehe Erkl. 107)}$$

und: $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (siehe Erkl. 108)

so geht derselbe über in:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = ctg\frac{\alpha}{2}$$

Erkl. 110. Für das Beispiel der *Terebra pura* ist:

$$\alpha = \frac{4{,}5}{34}\cdot 180^0 = 23\frac{14}{17}^0$$
$$= 23^0\frac{14}{17}\cdot 60'$$
$$= 23^0\,49\frac{7}{17}'$$
$$= 23^0\,49'\,\frac{7\,.\,60''}{17}$$
$$= 23^0\,49'\,24{,}7''$$

Hülfsrechnung 1.

$$\log x = \log 34 + \log ctg\, 23^0\,49'\,24{,}7''$$

Nun ist:

	$\log ctg\, 23^0\,49'\,20''$ =	0,3550536
(siehe Gleich. a) . . .	$+\,4{,}7''$	$-\,267{,}9$
		0,3550268
	$+\log 34$ =	1,5314789
	$\log x$ =	1,8865057
mithin:		5076

$$num \log x = 77{,}003$$

a). . . $10'' : 4{,}7'' = 570 : z$

$$z = \frac{4{,}7\,.\,570}{10}$$

Erkl. 111. Für das Beispiel des *Trochus maximus* ist:

$$\alpha = \frac{4{,}3}{100}\cdot 180^0 = 7\frac{74}{100}^0$$
$$= 7^0\,44\frac{4}{10}'$$
$$= 7^0\,44'\,24''$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2} \text{ (siehe Erkl. 107)}$$

und $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (siehe Erkl. 108)

setzt; man erhält hiernach:

$$x = s\,.\,ctg\frac{\alpha}{2} \text{ (siehe Erkl. 109)}$$

oder für α seinen Wert aus Gleich. 1). substituiert:

$$x = s\,.\,ctg\left(\frac{r}{s}\cdot 360:2\right)$$

mithin:

13). $x = s\,.\,ctg\left(\frac{r}{s}\cdot 180^0\right)$

als allgemeine Lösung der Aufgabe. *).

Für das Beispiel der *Terebra pura* erhält man somit:

$$x = 34\,.\,ctg\left(\frac{4{,}5}{34}\cdot 180^0\right) \text{ oder:}$$

$$x = 34\,.\,ctg\,23^0\,49'\,24{,}7'' \text{ (siehe Erkl. 110)}$$

und nach nebenstehender Hülfsrechnung 1).:

$$x = 77{,}003 \text{ mm}$$

Für das Beispiel des *Trochus maximus* erhält man:

$$y = 10\,.\,ctg\left(\frac{4{,}3}{100}\cdot 180^0\right) \text{ oder:}$$

$$y = 10\,.\,ctg\,7^0\,44'\,24'' \text{ (siehe Erkl. 111)}$$

und nach nebenstehender Hülfsrechnung 2).:

$$y = 73{,}574 \text{ cm}$$

*). Aus den rechtwinkligen Dreiecken $a\,n\,c$, $n\,p\,c$, ..., siehe Figur 8, erhält man, da dieselben ähnliche Dreiecke sind, die Proportion:

$$\frac{l}{s-s_1} = \frac{l_1}{s^1-s_2} = \frac{l_2}{s_2-s_3} = \frac{l_3}{s_3-s_4} = \ldots.$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 112:

$$\frac{l+l_1+l_2+l_3+\ldots\ldots}{s-s_1+s_1-s_2+s_2-s_3+s_3-s_4+\ldots..} = \frac{l}{s-s_1} = \frac{l_1}{s_1-s_2}$$

oder da $l+l_1+l_2+l_3+\ldots..$ gleich der gesuchten ganzen Schneckenlinie X ist und sich alle Glieder im Divisor des 1. Quotienten, ausgenommen von s, tilgen:

$$\frac{x}{s} = \frac{l}{s-s_1} = \frac{l_1}{s_1-s_2} = \ldots\ldots$$

d. h. die ganze Schneckenlinie x verhält sich zur Seitenlinie s des Kegels wie die Länge l (oder l_1, l_2) irgend einer Windung zur Breite $s-s_1$ (oder s_1-s_2, s_2-s_3....) dieser Windung.

Da sich die erste Breite: $s-s_1$ leicht messen lässt, so kann man auch diesen einfacheren Satz zur praktischen Berechnung der Schneckenlinien von Muscheln benutzen.

Hülfsrechnung 2.

$log\ y = log\,10 + log\ ctg\ 7^0\,44'\,24''$

Nun ist: $log\,10 = 1{,}0000000$

$+ log\ ctg\ 7^0\,44'\,24'' = +10{,}8667296 - 10$

$log\ y = 11{,}8667296 - 10$

oder: $log\ y = 1{,}8667296$

7244

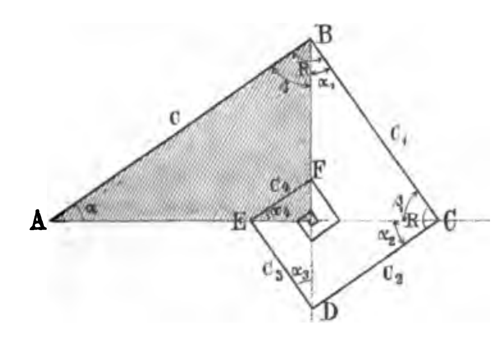
mithin:

$num\,log\ y = 73{,}574$

Erkl. 112. In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe der 1. Glieder der Verhältnisse zur Summe der 2. Glieder der Verhältnisse, wie die Glieder eines Verhältnisses. Man siehe das Kapitel: **Die Proportionen.**

Aufgabe 54. Errichtet man in einem rechtwinkligen Dreieck auf der Hypotenuse c in demjenigen Endpunkte, welcher nicht der Scheitel des kleineren spitzen Winkels α ist, eine Senkrechte bis zur Verlängerung mit der einen Kathete, im Schnittpunkt beider auf jene Senkrechte wieder eine Senkrechte bis zur Verlängerung mit der anderen Kathete, in dem zuletzt erhaltenen Schnittpunkte wieder eine Senkrechte, und so fort bis in's Unendliche, so entsteht eine rechtwinklig gebrochene, spiralförmige Linie, deren Länge berechnet und konstruiert werden soll.

Figur 9.



Formeln:

I. . . $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (siehe Formel 2, S. 19)

Ist q ein echter Bruch und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

II. . . $s = \frac{a}{1 - q}$ (siehe Formel 4, Seite 21)

Auflösung. Ist in Fig. 9 das schraffierte Dreieck das gegebene rechtwinklige Dreieck und ist in demselben der spitze Winkel β grösser als der spitze Winkel α, so stellt die gebrochene Linie $ABCDE\ldots$ die in der Aufgabe erwähnte spiralförmige Linie dar, deren Länge x berechnet werden soll.

Die gesuchte Länge x besteht aus der Summe der Längen der zu einander senkrechten Strecken $c, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ *infinitum.*

Da nun in dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$tg\ \alpha = \frac{c_1}{c},\ \text{also:}$$

1). . . $c_1 = c\,.\,tg\ \alpha$

ebenso in dem bei C rechtwinkligen Dreieck BCD:

$$tg\ \alpha_1 = \frac{c_2}{c_1},\ \text{also:}$$

$$c_2 = c_1\,.\,tg\ \alpha_1$$

oder mit Rücksicht der Gleichung 1). und mit Rücksicht, dass $\alpha_1 = \alpha$ (siehe Erkl. 113) ist:

2). . . $c_2 = c \cdot tg^2 \alpha$

analog in dem bei D rechtwinkligen Dreieck CDE:

$$c_3 = c_2 \cdot tg\,\alpha_2$$

oder nach der Erkl. 113 u. der Gleich. 2):

3). . . $c_3 = c \cdot tg^3 \alpha$, ebenso:

4). . . $c_4 = c \cdot tg^4 \alpha$

5). . . $c_5 = c \cdot tg^5 \alpha$ u. s. f. ist,

so erhält man für die gesuchte Länge x:

$$x = c + c \cdot tg\,\alpha + c \cdot tg^2\alpha + c \cdot tg^3\alpha + c \cdot tg^4\alpha + \ldots\ldots inf.$$

oder:

6). $x = c\,(1 + tg\,\alpha + tg^2\alpha + tg^3\alpha + tg^4\alpha + \ldots\ldots inf.)$ *).

Die in der Klammer dieser Gleichung stehende Reihe:

$$1 + tg\,\alpha + tg^2\alpha + tg^3\alpha + tg^4\alpha + \ldots$$

ist eine geometrische Reihe, deren Anfangsglied $a = 1$, deren Gliederzahl $n = \infty$ und deren Quotient $= tg\,\alpha$, nämlich nach der Erkl. 114 gleich einem **echten Bruch** ist, man hat somit nach der vorstehenden Formel II für die Summe s dieser Reihe:

$$s = \frac{1}{1 - tg\,\alpha}$$

Die gesuchte Länge x ist also:

$$x = c \cdot \frac{1}{1 - tg\,\alpha} \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{c}{1 - tg\,\alpha}$$

*). Da die in Gleichung 6). enthaltene geometrische Reihe eine fallende, also auch eine konvergente Reihe ist, so stellt die rechtwinklig gebrochene spiralförmige Linie $ABCD$.... das Bild einer konvergierenden Reihe dar. Würde man von dem Scheitel des kleineren Winkels α ausgehend eine analoge gebrochene Linie konstruieren, so würde bei Berechnung der Länge derselben $tg\,\beta$, nämlich die Tangens eines Winkels, der grösser als 45 ist (siehe Erkl. 114) vorkommen und da alsdann $tg\,\beta$ kein echter Bruch, so würde auch die entsprechende unendliche Reihe nicht summiert werden können, folglich eine divergente Reihe sein. Die im Scheitel des Winkels α in analoger Weise konstruierte rechtwinklig gebrochene spiralförmige Linie stellt somit das Bild einer divergierenden Reihe dar, wovon man sich durch eine betreffende Figur überzeugen kann.

Erkl. 113. Die in Figur 9 mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bezeichneten Winkel sind sämtlich einander gleich, denn es ist z. B.:

$$\alpha + \beta = R \quad \text{und}$$
$$\alpha_1 + \beta = R, \quad \text{mithin: } \alpha = \alpha_1$$

ebenso ist:

$$\alpha_1 + \beta_1 = R \quad \text{und}$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = R, \quad \text{mithin:}$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha \quad \text{u. s. f.}$$

Erkl. 114. Da in dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck:

$$\alpha + \beta = 90^0$$

und der Annahme gemäss:

$$\alpha < \beta \text{ ist,}$$

so muss α **kleiner als 45^0** sein.

Da ferner die Tangens eines Winkels von $45^0 = 1$ und die Tangens eines Winkels, der kleiner als 45^0 ist, kleiner als 1, also ein **echter Bruch** ist, so ist für den in der Aufgabe gegebenen Fall auch $tg\,\alpha$ ein **echter Bruch**.

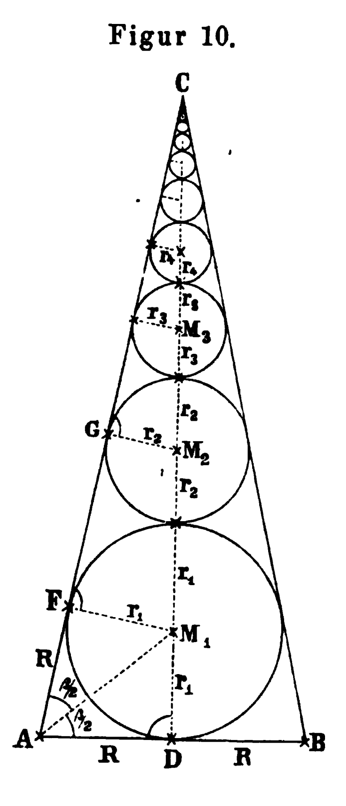
Man siehe das Kapitel: **Die Goniometrie**, speziell den Abschnitt, welcher über das Wachsen und Abnehmen der goniometrischen Funktionen handelt.

Aufgabe 55. In einem geraden Kegel, dessen Grundflächen-Radius $= R$ und dessen Höhe $= H$ gegeben ist, wird auf die Grundfläche eine den Mantel des Kegels berührende Kugel gelegt, darauf in dem nach der Spitze zu noch übrigen Raum wieder eine Kugel und so immer weiter. Wie gross ist:

a). die Summe der Oberflächen und

b). die Summe der Volumnia dieser unendlich vielen Kugeln?

Figur 10.



Erkl. 115. Die Formel zur Berechnung der Oberfläche O einer Kugel, deren Radius mit r bezeichnet wird, ist:

$$O = 4\pi r^2$$

Formeln:

$$\text{I.} \quad s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (siehe Formel 2, S. 19)

Ist q ein echter Bruch und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

$$\text{II.} \quad s = \frac{a}{1 - q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21)

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Summe der Oberflächen der in dem Kegel befindlichen Kugeln — siehe Figur 10, welche ein Durchschnitt des Kegels und der Kugeln darstellt, mit x, und die gesuchte Summe der Volumnia dieser Kugeln mit y, so hat man nach den Erkl. 115 und 116, wenn man die Radien der unendlich vielen Kugeln, der Reihe nach mit $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ bezeichnet, die Gleichungen:

$$x = 4\pi r_1^2 + 4\pi r_2^2 + 4\pi r_3^2 + \ldots$$

$$y = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 + \frac{4}{3}\pi r_3^3 + \ldots$$

oder die einfacheren Gleichungen:

1). $x = 4\pi (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots)$

2). $y = \frac{4}{3}\pi (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + \ldots)$

Es ist also die nächste Aufgabe, die Radien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ der Kugeln in die gegebenen Dimensionen des Kegels auszudrücken, bezw. die in den Klammern dieser Gleichungen stehenden unendlichen Reihen zu summieren und dies geschieht wie folgt:

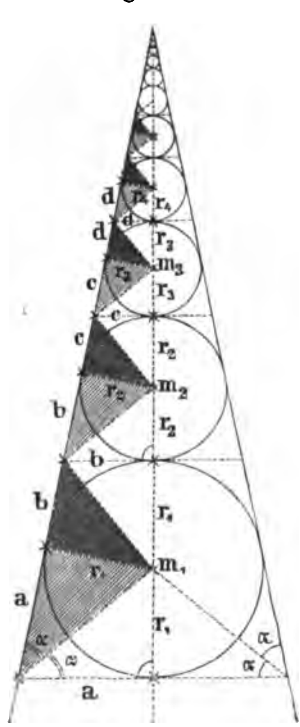
Da der Durchschnitt des Kegels mit den darin befindlichen Kugeln, die sich und den Kegelmantel berühren, siehe Figur 10, ein Dreieck (einen Winkel) darstellt, in welchem Kreise beschrieben sind, die sich und zwei der Seiten des Dreiecks (die Schenkel des Winkels) berühren, so weiss man nach der Erkl. 117, dass die Radien dieser Kreise, bezw. die Radien jener Kugeln, in ihrer Aufeinanderfolge nach der Spitze zu, eine **fallende geometrische** Reihe bilden. Bilden aber die Radien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ eine geometrische Reihe, so bilden auch deren Quadrate, bezw. deren Kuben eine geometrische Reihe (siehe Erkl. 118).

Erkl. 116. Die Formel zur Berechnung des Volumens V einer Kugel, deren Radius mit r bezeichnet wird, ist:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über die **Kugel** handelt.

Figur 11.



Erkl. 117. Ein geometrischer Satz heisst: „Werden zwischen die Schenkel eines Winkels Kreise beschrieben, welche die Schenkel des Winkels und auch sich in ihrer Aufeinanderfolge berühren, so bilden die Radien dieser Kreise in ihrer Aufeinanderfolge, nach dem Scheitel des Winkels zu, eine **fallende geometrische** Reihe.“

Vorauss. Bezeichnet man der Reihe nach die Radien der Kreise, wie in Figur 11 angegeben ist, mit $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$, so besteht die Reihe:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\ldots$$

Behaupt. Die Reihe:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\ldots$$

soll eine **fallende geometrische** Reihe sein.

In der geometrischen Reihe:

$$r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2, \ldots\ldots$$

ist das Anfangsglied $a = r_1^2$, die Anzahl n der Glieder $= \infty$, der Quotient:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \left(\text{oder } \frac{r_3^2}{r_2^2} \text{ oder } \frac{r_4^2}{r_3^2}\right)$$

nämlich ein **echter Bruch**,

somit hat man für die Summe s der Glieder dieser Reihe nach vorstehender Formel II:

$$s = \frac{r_1^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$$

und vorstehende Gleichung 1). geht über in:

$$3). \ldots x = 4\pi \cdot \frac{r_1^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$$

In analoger Weise geht die Gleich. 2). über in:

$$4). \ldots y = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r_1^3}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3}$$

Nun kann man den Radius r_1 der 1. Kugel trigonometrisch in den Radius R des Kegels und den Winkel $\frac{\beta}{2}$, der sich in dem rechtwinkligen Dreieck ADC aus H und R leicht berechnen lässt, ausdrücken. Auf geometrische Weise erhält man r_1, wie folgt:

Das rechtwinklige Dreieck ADC ist ähnlich dem rechtwinkligen Dreieck CFM_1, mithin besteht die Proportion:

$$AD : M_1F = CD : CF$$

Da nun:

$$AD = R, \quad M_1F = r_1, \quad CD = H \text{ und}$$
$$CF = AC - AF = \sqrt{H^2+R^2} - AD$$
$$= \sqrt{H^2+R^2} - R$$

ist, so geht diese Proportion über in:

$$R : r_1 = H : \sqrt{H^2+R^2} - R$$

und hieraus erhält man:

$$5). \ldots r_1 = \frac{R(\sqrt{H^2+R^2}-R)}{H}$$

Den Radius r_2 der folgenden Kugel, bezw. den Quotienten $\frac{r_2}{r_1}$ findet man mittelst den ähnlichen rechtwinkl. Dreiecken CFM_1 und CGM_2 aus der Proportion:

$$GM_2 : FM_1 = CM_2 : CM_1$$

Da nun:

$$GM_2 = r_2, \quad FM_1 = r_1$$
$$CM_2 = CD - M_2D = H - 2r_1 - r_2 \text{ und}$$

Beweis. Die Reihe:

$$r_1,\; r_2,\; r_3,\; r_4,\; \ldots\ldots.$$

ist eine fallende Reihe, da jedes folgende Glied, siehe Figur 11, kleiner als das nächst vorhergehende ist. Soll sie eine geometrische Reihe sein, so müssen die Quotienten je zweier aufeinanderfolgenden Glieder dieser Reihe einander gleich sein, es muss also:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \ldots\ldots.$$

sein, was zu beweisen übrig bleibt:

Zieht man zu diesem Zweck in Figur 11 die je zwei sich berührenden Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten und noch die in Figur 11 angegebenen weiteren Hülfslinien, so sind nach dem Satze: „Die von einem Punkte an einen Kreis gezogenen Tangenten sind gleich lang" die in der Figur 11 mit den gleichen Buchstaben a, b, c bezeichneten Strecken bezw. einander gleich; ferner entstehen 2 Arten ähnlicher Dreiecke, nämlich die hell schattierten Dreiecke und die dunkel schattierten Dreiecke, welche je unter sich ähnlich sind, weil in jedem dieser 2 Arten von Dreiecken gleiche Winkel vorkommen.

Aus der Aehnlichkeit der hell schattierten Dreiecke erhält man die Proportionen:

$$1).\;\ldots\; \frac{r_2}{r_1} = \frac{b}{a}$$

$$2).\;\ldots\; \frac{r_3}{r_2} = \frac{c}{b}$$

$$3).\;\ldots\; \frac{r_4}{r_3} = \frac{d}{c} \text{ u. s. f.}$$

Aus der Aehnlichkeit der dunkel schattierten Dreiecke erhält man die Proportionen:

$$4).\;\ldots\; \frac{r_2}{r_1} = \frac{c}{b}$$

$$5).\;\ldots\; \frac{r^3}{r_2} = \frac{d}{c} \text{ u. s. f.}$$

Da nun aus den Proportionen 1). und 4). sich ergibt, dass

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

ferner aus den Proportionen 2). und 5). sich ergibt, dass:

$$\frac{c}{d} = \frac{d}{c} \text{ u. s. f. ist,}$$

so muss auch:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \ldots\ldots \text{ sein,}$$

was zu beweisen war.

Erkl. 118. Ist:

$$a,\; aq,\; aq^2,\; aq^3$$

eine geometrische Reihe, so ist auch

$$a^n,\; a^n q^n,\; a^n q^{2n},\; a^n q^{3n}$$

eine geometrische Reihe, wovon man sich leicht überzeugen kann.

$$CM_1 = CD - M_1D = H - r_1 \text{ ist,}$$

so geht diese Proportion über in.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{H - 2r_1 - r_2}{H - r_1}$$

und hieraus erhält man nach einem Summensatz (siehe die Proportionen):

$$\frac{r_2 + H - 2r_1 - r_2}{r_1 + H - r_1} = \frac{r_2}{r_1} \text{ oder:}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{H - 2r_1}{H} \text{ oder:}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{2r_1}{H}$$

Setzt man nunmehr für r_1 den mittelst der Gleichung 5). gefundenen Wert, so erhält man für den Quotienten $\frac{r_2}{r_1}$:

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{2R\left(\sqrt{H^2+R^2} - R\right)}{H^2}$$

oder:

$$6).\;.\; \frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{2R}{H^2}\left(\sqrt{H^2+R^2} - R\right)$$

Setzt man die für r_1 und $\frac{r_2}{r_1}$ gefundenen Werte in die Gleichungen 3). und 4). ein, so erhält man für die gesuchte Summe x der Oberflächen sämtlicher Kugeln:

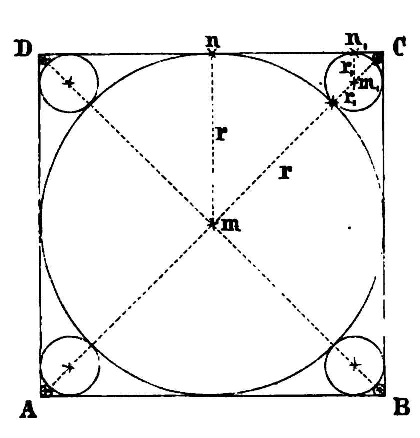
$$x = \frac{4\pi R^2\left(\sqrt{H^2+R^2} - R\right)^2}{H^2\left[1 - \left(1 - \frac{2R}{H^2}\left(\sqrt{H^2+R^2} - R\right)\right)^2\right]}$$

Ferner erhält man für die gesuchte Summe y der Volumnia sämtlicher Kugeln:

$$y = \frac{4\pi R^3\left(\sqrt{H^2+R^2} - R\right)^3}{3H^3\left[1 - \left(1 - \frac{2R}{H^2}\left(\sqrt{H^2+R^2} - R\right)\right)^3\right]}$$

Aufgabe 56. Wenn man in ein Quadrat, dessen Seite $= s$ ist, einen Kreis, in die 4 bleibenden Eckstücke wieder einen Kreis beschreibt und so unaufhörlich fort, so ist die Summe der Inhalte dieser sämtlichen Kreise gleich, wie gross?

Figur 12.



Erkl. 118ᵃ. Aus der Figur 12 erhält man die Proportion:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{Cm_1}{Cm}$$

Da nun Cm die halbe Diagonale d des Quadrats $ABCD$, dessen Seite $= s$ gegeben ist, darstellt und

$$d^2 = s^2 + s^2 \quad \text{oder:}$$

$$d^2 = 2s^2 \quad \text{mithin:}$$

$$d = s\sqrt{2} \quad \text{also:}$$

$$Cm = \frac{s}{2}\sqrt{2} \text{ ist; da ferner:}$$

$$Cm_1 = Cm - r - r_1 = \frac{s}{2}\sqrt{2} - r - r_1$$

gesetzt werden kann, so geht vorstehende Proportion über in:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\frac{s}{2}\sqrt{2} - r - r_1}{\frac{s}{2}\sqrt{2}}$$

und hieraus erhält man mittelst eines Summensatzes (siehe die Proportionen):

Formeln:

$$\text{I.} \quad s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{(siehe Formel 1, S. 19)}$$

Ist hierin q ein echter Bruch und $n = \infty$, so erhält man hieraus:

$$\text{II.} \quad s = \frac{a}{1 - q} \quad \text{(siehe Formel 4, Seite 21)}$$

Auflösung. Stellt Figur 12 das gegebene Quadrat mit einer Anzahl der gedachten Kreise dar, so ist ersichtlich, dass man für je 2 aneinanderstossende Quadratseiten eine Reihe von Kreisen erhält, die an Anzahl und Grösse gleich sind, dass ferner z. B. die Kreise um m, m_1, ... sich und die Schenkel des Winkels DCB berühren, dass somit nach der Erkl. 117, Seite 121, die Radien r, r_1, ... in ihrer Aufeinanderfolge eine geometrische Reihe bilden.

Bezeichnet man mit x die gesuchte Summe der Inhalte sämtlicher Kreise, so hat man mit Rücksicht, dass der Kreis um m bei der erwähnten Winkelschenkelberührung 4 mal vorkommt, die Gleichung:

$$x = 4 . (r^2\pi + r_1^{\,2}\pi + r_2^{\,2}\pi + \ldots.) - 3r^2\pi$$

oder:

$$1). \quad x = 4\pi(r^2 + r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + \ldots.) - 3r^2\pi$$

Da nun die in der Parenthese stehende algebraische Summe eine fallende geometrische Reihe (siehe Erkl. 117) darstellt, deren Anfangsglied $a = r^2$, deren Gliederzahl $n = \infty$ und deren Quotient $\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}$ (siehe Erkl. 118ᵃ) ist, so erhält man nach vorstehender Formel II für diese Summe $=$

$$\frac{r^2}{1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}}$$

und vorstehende Gleichung 1). geht in Rücksicht, dass $r = \frac{s}{2}$ ist, über in:

$$x = 4\pi \cdot \frac{\frac{s^2}{4}}{1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}} - 3 \cdot \frac{s^2}{4}\pi$$

und hieraus erhält man der Reihe nach:

$$\frac{\frac{s}{2}\sqrt{2}-r}{\frac{s}{2}\sqrt{2}+r} = \frac{r_1}{r}$$

Da nun $r = \frac{s}{2}$ ist, so ergibt sich hiernach für den Quotienten $\frac{r_1}{r}$:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\frac{s}{2}\sqrt{2}-\frac{s}{2}}{\frac{s}{2}\sqrt{2}+\frac{s}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

also für:

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2+2\sqrt{2}+1}$$

oder:

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$

$$x = \pi \cdot \frac{s^2}{4}\left(\frac{4(3+2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}} - 3\right)$$

$$x = \frac{\pi s^2}{4}\left(\frac{12+8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} - \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$x = \frac{\pi s^2}{4} \cdot \frac{12-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi s^2}{4} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi s^2}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$$

Für die gesuchte Summe x der Inhalte der unendlich vielen Kreise findet man also:

$$x = \frac{\pi s^2}{8}\left(3\sqrt{2}-2\right)$$

Aufgabe 57. In *Burmeister's* „Grundris der Naturgeschichte" (siehe Erkl. 119) findet man folgende Angabe: „Man nimmt an, dass 1000 Millionen Menschen auf der Erde wohnen und dass alle 33 Jahre eine Generation aussterbe, während ungefähr $\frac{1}{8}$ mehr geboren werde." Wenn diese Angabe richtig wäre, vor wieviel Jahren konnte das Menschengeschlecht aus 2 Personen bestanden haben, und wieviel Menschen würden zur Zeit von Christi Geburt gelebt haben?

Erkl. 119. *Karl Burmeister*, geboren den 15. Januar 1807 in Stralsund, war ein bedeutender Naturforscher und schrieb viele Werke über Naturgeschichte, unter anderen im Jahre 1833 seinen „Grundris der Naturgeschichte", dem obige Angaben entnommen sein sollen.

Formel:

$$t = a \cdot q^{n-1}$$ (siehe Formel 1, Seite 18.)

Auflösung. 1). Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Jahre mit x und die Anzahl der Zeiträume von je 33 Jahren, welche während den x Jahren verstrichen sind und innerhalb deren je eine Generation mutmasslich ausstirbt, mit y, so besteht die Gleichung:

1). . . . $x = 33 \cdot y$

Zur Bestimmung der Anzahl y der Zeiträume von je 33 Jahren dient folgende Betrachtung:

Waren vor x Jahren 2 Personen vorhanden, so hinterliessen dieselben bei ihrem mutmasslichen Tode nach 33 Jahren:

$$2 + \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{8}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2 \text{ oder } =$$

$$\frac{9}{8} \cdot 2 \text{ Personen}$$ (siehe Erkl. 120)

Nach den ersten 33 Jahren waren hiernach $\frac{9}{8} \cdot 2$ Personen vorhanden, und diese $\frac{9}{8} \cdot 2$ Personen hinterliessen bei ihrem mutmasslichen Tode nach 33 Jahren:

Erkl. 120. Unter „Generation" versteht man die **Masse** der zu gleicher Zeit lebenden Menschen.

Das Durchschnittsalter von drei Generationen ist 100 Jahre. Gewöhnlich wird das Durchschnittsalter von einer Generation, d. i. die Zeit in welcher eine Generation ausgestorben ist, zu 33 Jahre angenommen.

Besteht eine Generation z. B. aus a Personen, so würde nach 33 Jahren keine Person mehr existieren, da sich jedoch in dieser Zeit diese a Personen vermehren und zwar, der Aufgabe gemäss, um $\frac{1}{8}$ mehr als gestorben sind, so beträgt die Nachkommenschaft dieser aus a Personen bestehenden Generation $=$

$$a + \frac{1}{8} \cdot a = \frac{8}{8} a + \frac{1}{8} a \text{ oder } = \frac{9}{8} . a \text{ Personen.}$$

Erkl. 121. Nebenstehende Gleichung:

$$2). \quad . \quad . \quad \left(\frac{9}{8}\right)^y = 500\,000\,000$$

nach y aufgelöst gibt der Reihe nach:

$$y . \log \left(\frac{9}{8}\right) = \log 500\,000\,000$$

$$y = \frac{\log 500\,000\,000}{\log 9 - \log 8}$$

$$y = \frac{8{,}6989700}{0{,}9542425 - 0{,}9030900}$$

$$y = \frac{8{,}6989700}{0{,}0511525}$$

$$y = \frac{86989700}{511525}$$

$$y = 170{,}06$$

$$\frac{9}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{8} . 2 = \frac{8}{8} \cdot \frac{9}{8} . 2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{8} . 2 = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} . 2 \text{ oder } = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot 2 \text{ Personen.}$$

Nachdem also 2 . 33 Jahren verflossen waren existierten hiernach $\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot 2$ Personen.

Analog wie vorhin findet man, dass nachdem 3 . 33, 4 . 33, 5 . 33 .... Jahre verflossen waren, bezw. $\left(\frac{9}{8}\right)^3 . 2$, $\left(\frac{9}{8}\right)^4 . 2$, $\left(\frac{9}{8}\right)^5 . 2$, ... Personen existierten. Die Personen, welche am Anfang der x Jahre und in den Zwischenräumen von je 33 Jahren existierten, bilden somit in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

$$2, \; \frac{9}{8} \cdot 2, \; \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot 2, \; \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 2, \; \left(\frac{9}{8}\right)^4 \cdot 2, \; .....$$

Von dieser Reihe kennt man das Anfangsglied $a = 2$, den Quotienten $q = \frac{9}{8}$, das letzte Glied $t = 1000\,000\,000$; ferner ist die Anzahl n der Glieder dieser Reihe gleich der um 1 vermehrten Anzahl der Zwischenräume von je 33 Jahren, also $= y + 1$.

Nach vorstehender Formel hat man somit für y die Bestimmungsgleichung:

$$1000\,000\,000 = 2 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{y+1-1} \text{ oder:}$$

$$2). \quad . \quad . \quad \left(\frac{9}{8}\right)^y = 500\,000\,000$$

woraus man nach der Erkl. 121:

$$3). \quad . \quad . \quad y = 170{,}06 \text{ erhält.}$$

Substituiert man diesen Wert in Gleich. 1)., so erhält man:

$$x = 33 . 170{,}06 \text{ oder:}$$

$$x = 5611{,}98$$

Vor 5612 Jahren bestand somit, den Angaben der Aufgabe entsprechend, das Menschengeschlecht aus 2 Personen.

---

2). Zur Berechnung der Anzahl z der Personen, welche zur Zeit vor Christi Geburt gelebt haben sollen, dient folgende Betrachtung:

Analog wie in der Auflösung des 1. Teils der Aufgabe angegeben ist, findet man, dass 33 Jahren nach Chr. $= \frac{9}{8} \cdot z$, 2 . 33 Jahren n. Chr. $= \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot z$, 3 . 33 Jahren n. Chr. $= \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot z$ Personen, u.s.f. lebten. Die Personen,

welche also zur Zeit von Chr. Geburt und in den Zwischenräumen von je weiteren 33 Jahren existierten, bilden somit in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

$$z,\ \frac{9}{8}\cdot z,\ \left(\frac{9}{8}\right)^2\cdot z,\ \left(\frac{9}{8}\right)^3\cdot z,\ \ldots\ldots$$

In dieser Reihe ist das Anfangsglied $a = z$ gesucht; ferner ist der Quotient $q = \frac{9}{8}$, das letzte Glied $t = 1000\,000\,000$ und die Anzahl n der Glieder gleich der um 1 vermehrten Anzahl der Zwischenräume von je 33 Jahren, die von Chr. Geburt bis 1884 n. Chr. verstrichen sind, nämlich $= \frac{1884}{33} + 1$.

Nach vorstehender Formel hat man somit für z die Bestimmungsgleichung:

$$1000\,000\,000 = z\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1884}{33}+1-1}$$

oder:

$$4).\ \ldots\ z = \frac{1000\,000\,000}{\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1884}{33}}}$$

woraus man nach nebenstehender Hülfsrechnung für die Anzahl z der Personen, welche zur Zeit von Christi Geburt lebten:

$$z = 1\,201\,190 \text{ Personen}$$

erhält.

Hülfsrechnung.

$$\log z = 1000\,000\,000 - \frac{1884}{33}(\log 9 - \log 8)$$

Nun ist: $\log 9 = 0{,}9542425$

$-\log 8 = -0{,}9030900$

$0{,}0511525$

$\cdot\frac{1}{33}$

$0{,}0015501$

$.\,1884$

$2{,}9203884$

Ferner ist:

$\log 1000\,000\,000 = 9{,}0000000$

$-\frac{1884}{33}(\log 9 - \log 8) = -2{,}9203884$

$\log z = 6{,}0796116$

5792

324

mithin:

$num\log z = 1201\,190$

Aufgabe 58. Die Physik lehrt (siehe Erkl. 122), dass, wenn man sich in arithmetischer Reihe über den Meeresspiegel erhebt, das mitgenommene Barometer in einer geometrischen Reihe fällt. Wenn nun am Meeresspiegel, also in der Höhe $h = 0$, der Barometerstand $b = 760$ mm und in der Höhe $h_1 = 10{,}5$ m der Barometerstand $b_1 = 759$ mm ist; welches wird der Barometerstand in der Höhe $H = n\,.\,h_1$, z. B. $= 50\,.\,10{,}5$ m sein?

Auflösung. Der Aufgabe gemäss ist am Meeresspiegel, also in der Höhe $h = 0$, der Barometerstand $= b$ mm, in der Höhe $h_1 = b_1$ mm. Erhebt man sich nun stetig so, dass jede der folgenden erreichten Höhen mit den vorhergehenden eine arithmetische Reihe bildet, erhebt man sich also so, dass, wenn die 1. Höhe $= 0$, die 2. Höhe $= h_1$, die 3. Höhe $= 2h_1$, die 4. Höhe $= 3h_1$ u. s. f. ist, so bilden, gemäss der Aufgabe und

Erkl. 122. Das in der Aufgabe erwähnte physikalische Gesetz, welches sich auf den Barometerstand in verschiedenen Höhen bezieht, ist folgendes:

Ist am Meeresspiegel der Barometerstand $= 360$ mm, so muss man sich erfahrungsgemäss mit dem Barometer um 10,5 m erheben, wenn das Barometer um 1 mm, also bis auf $360 - 1 = 359$ mm, oder was dasselbe ist, bis auf $360 \cdot \frac{359}{360}$ mm fallen soll. Erhebt man sich mit dem Barometer um weitere 10,5 m, so wird das Barometer nicht abermals um 1 mm, sondern nur um $\frac{359}{360}$ mm fallen (dieses gründet sich auf das *Mariott*'sche Gesetz nach welchem die Dichtigkeit der Luft proportional dem Druck ist, unter welchem sie sich befindet). Der Barometerstand in einer Höhe von 10,5 m über dem Meeresspiegel wird also =

$$360 \cdot \frac{359}{360} - \frac{359}{360} \text{ oder } =$$

$$\frac{359}{360} \cdot (360 - 1) = \frac{359}{360} \cdot 360 \cdot \frac{359}{360} \text{ oder } =$$

$$360 \cdot \left(\frac{359}{360}\right)^2 \text{ sein.}$$

Erhebt man sich um weitere 10,5 m, so fällt der Barometer um $\left(\frac{359}{360}\right)^2$ mm; der Barometerstand in einer Höhe von 2 . 10,5 m über dem Meeresspiegel wird also =

$$360 \cdot \left(\frac{359}{360}\right)^2 - \left(\frac{359}{360}\right)^2 \text{ oder } =$$

$$\left(\frac{359}{360}\right)^2 \cdot (360 - 1) = \left(\frac{359}{360}\right)^2 \cdot 360 \cdot \frac{359}{360}$$

$$\text{oder } = 360 \cdot \left(\frac{359}{360}\right)^3 \text{ u. s. f. sein.}$$

Das heisst: Erhebt man sich stetig um dieselbe Höhe von 10,5 m, also bilden die hierdurch erreichten verschiedenen Höhen in ihrer Aufeinanderfolge eine **arithmetische** Reihe, so fällt das mitgenommene Barometer stetig um den $\frac{359}{360}$sten Teil seines vorherigen Standes, es bilden also die verschiedenen Barometerstände in ihrer Aufeinanderfolge eine **geometrische** Reihe.

Man siehe das Lehrbuch von Dr. *Kleyer*, welches über das **Gleichgewicht und Druck der Luft (Gase)** handelt.

nach der Erkl. 122, die diesen Höhen entsprechenden Barometerstände eine geometrische Reihe und zwar muss diese Reihe, wenn der 1te Barometerstand $= b$, der 2te $= b_1$ ist, den Quotienten $\frac{b_1}{b}$ haben.

Hat man also für die verschiedenen Höhen die **arithmetische** Reihe:

1). . . $0,\ h_1,\ 2h_1,\ 3h_1,\ 4h_1 \ldots\ldots$

so bilden die diesen Höhen entsprechenden Barometerstände die **geometrische** Reihe:

2). $b,\ b \cdot \frac{b_1}{b},\ b \cdot \left(\frac{b_1}{b}\right)^2,\ b \cdot \left(\frac{b_1}{b}\right)^3,\ b \cdot \left(\frac{b_1}{b}\right)^4, \ldots$

Soll man nun für eine Höhe $H = n \cdot h_1$ den Barometerstand berechnen, so beachte man, dass dem Glied der arithmetischen Reihe 1)., welches $= n \cdot h_1$ ist, das Glied der geometrischen Reihe 2). entspricht, welches $= b \cdot \left(\frac{b_1}{b}\right)^n$ ist und dies ist die **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Substituiert man somit in $b \cdot \left(\frac{b_1}{b}\right)^n$ die gegebenen Zahlenwerte, so erhält man für den gesuchten Barometerstand x in der Höhe H ($= n \cdot h_1 = 50 \cdot 10{,}5$ m):

$$x = 760 \cdot \left(\frac{759}{760}\right)^{50} \text{mm}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich mit Hülfe der Logarithmen:

$$log\, x = log\, 760 + 50\, (log\, 759 - log\, 760)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} & & \quad(+1) \qquad\quad (-1) \\ log\, 759 & = & 2{,}8802418 \\ -\,log\, 760 & = & -2{,}8808136 \\ \hline & & 0{,}9994282 - 1 \\ & & .\ 50 \\ \hline & & 49{,}9714100 - 50 \\ +\,log\, 760 & = & +2{,}8808136 \\ \hline log\, x & = & 52{,}8522236 - 50 \\ \text{oder: } log\, x & = & 2{,}8522236 \\ & & 2237 \end{array}$$

mithin:

$$num\, log\, x = 711{,}58$$

Der gesuchte Barometerstand ist also:

$$x = 712 \text{ mm}$$

Aufgabe 59. Ein Forstrevier ist zu 32500 cbm abgeschätzt und man weiss, dass 100 cbm sich jährlich um 3 cbm vermehren. Wieviel Kubikmeter Holz wird dieses Revier nach 24 Jahren enthalten?

Formel:

$$t = aq^{n-1}$$ (siehe Formel 1, Seite 18)

Auflösung. Wenn 100 cbm des Holzbestandes des Forstreviers sich jährlich um 3 cbm vermehren, so wachsen dieselben an zu 100 + 3 cbm, mithin wächst 1 cbm an zu $\frac{100+3}{100}$ oder zu $\frac{103}{100}$, d. i. = 1,03 cbm und die 32500 cbm, aus welchen das ganze Forstrevier besteht, wachsen hiernach bis Ende des 1ten Jahres an zu:

a). . . . $32500 \cdot 1{,}03$ cbm

Da nun während des 2ten Jahres wiederum 1 cbm zu 1,03 cbm anwächst, so wachsen die soeben unter a). gefundenen cbm Holz, aus welchen der Wald am Ende des 1ten Jahres besteht, bis zu Ende des 2ten Jahres an, zu:

$32500 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03$ oder zu:

b). . . . $32500 \cdot (1{,}03)^2$

In analoger Weise findet man, dass der Waldbestand bis Ende des 3ten, 4ten, ... Jahres, bezw. anwachsen wird, zu:

c). . . . $32500 \cdot (1{,}03)^3$

d). . . . $32500 \cdot (1{,}03)^4$ u. s. f.

Hieraus ersieht man, dass der ursprüngliche Holzbestand und die aufeinanderfolgenden Bestände am Ende eines jeden folgenden Jahres die geometrische Reihe:

$$32500,\quad 32500 \cdot 1{,}03,\quad 32500 \cdot (1{,}03)^2$$
$$32500 \cdot (1{,}03)^3, \ldots\ldots$$

bilden und dass man für das 25ste Glied dieser Reihe, d. i. der gesuchte Holzbestand x am Ende des 24sten Jahres:

1). . . $x = 32500 \cdot (1{,}03)^{24}$ (siehe Erkl. 123)

erhält.

Nach nebenstehender Hülfsrechnung ergibt sich somit für den gesuchten Holzbestand des Forstreviers nach 24 Jahren:

$$x = 66065{,}7 \text{ cbm.}$$

Erkl. 123. Nebenstehende Gleich. 1). hätte man auch direkt mit Benutzung der Hauptzinseszinsformel erhalten.

Man siehe Dr. *Kleyer's* Lehrbuch der „Zinseszins- und Rentenrechnung.“

Hülfsrechnung.

$log\, x = log\, 32500 + 24 \cdot log\, 1{,}03$

Nun ist: $log\, 1{,}03 = 0{,}0128372$
. 24
513488
256744
0,3080928
$+ log\, 32500 = 4{,}5118834$
$log\, x = 4{,}8199762$
9714
48
46,2

mithin:
$num\,log\, x = 66065{,}7$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 101. Körperberechnungen. 2. Buch.

Inhalt: Praktische Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper, als: Berechnung von Behältern, Gräben, Feldschanzen, Eisenbahndämmen u. Schwellen, Planken, Balken, Bohlen, Turmdächer, Röhrenleitungen, cylindr. Gefässen, Baumstämmen, Mörsern, Ringmauern, Dachkändeln, Schiffsmasten, Gewölben, Brunnenschachten, Trichtern, Granaten, Bassins etc.

Heft 102. Die arithmetischen, geometrischen und harmonischen Reihen. (Forts. von Heft 26.)

Inh.: Gemischte prakt. Aufgaben über die nied. arithm. und die geometr. Reihen.

Heft 103. „ 104. „ 105. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 101.)

Inh.: Die gegenseitigen Beziehungen der 5 einfachen Körper und der regul. Polyeder (auch Aehnlichkeit), Aufgaben

Heft 106. „ 107. „ 108. Die arithmetischen, geometr. und harmonischen Reihen, Schluss. (Forts. von Heft 102.)

Inh.: Gemischte prakt. Aufgaben auch über die harmonischen Reihen. Polygonal- und Pyramidalzahlen. — Solche Aufgaben, welche auf Diophantische Gleichungen, Kettenreihen und Kettenbrüche führen. — Schluss dieses Kapitels, Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelverzeichnis etc.

Heft 109. „ 110. „ 111. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 105.)

Inh.: Ueber zusammengesetzte Körper. Berechnung solcher Körper, welche sich in Teile zerlegen lassen, die mittelst den im 1. Buch aufgestellten Formeln berechnet werden können. — Auch Berechnung von Krystallkörpern.

Heft 112. Zinseszinsrechnungen. Schluss. (Forts. von Heft 50.)

Inh.: Weitere gemischte praktische Aufgaben z. Schluss der Zinseszinsrechnung

Heft 113. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **114.** } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } **Rentenrechnung als Fortsetz.**
„ **116.** } der Zinseszinsrechnung.
„ **117.** }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. **Körperberechnungen.** 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ **120.** } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **121.** } (Forts. von Heft 118.)
„ **122.** }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. **Rentenrechnung.** — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. **Körperberechnungen.** 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **126.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ **128.** } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **129.** } (Forts. von Heft 124.)
„ **130.** }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen.

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **132.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. **Körperberechnungen.** 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. **Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ **136.** } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **137.** } (Forts. von Heft 133.)
„ **138.** }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **140.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **142.** } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **144.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **146.** } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **148.** } **einer Unbekannten.** Schluss.
„ **149.** } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } **Körperberechnungen.** 2. Buch.
„ **151.** } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. **Magnetismus und Elektrizität.**

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ **154.** } **gaben,** gelöst durch **geometr.**
„ **155.** } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ **157.** } **gaben,** gelöst durch **algebr.**
} **Analysis.** (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. **Trigonometrie.** (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ **160.** } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten implizieter Funktionen.

u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

112. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Forts. v. Heft 108. — Seite 129—144.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur rationellen **Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 108. — Seite 129—144.

Inhalt:

Schluss der gelösten Aufgaben über die niederen arithmetischen und geometrischen Reihen. — Ungelöste Aufgaben über die niederen arithmetischen Reihen.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint **monatlich** in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des **Studierenden** überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den **Schulunterricht benutzt** werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften **für** die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.**

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des **mathematisch-naturwissenschaftlichen** Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dme **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für** den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 60. Die ortsanwesende Bevölkerung Stuttgarts belief sich am 3. Dez. 1864 auf 69 084 Seelen, am 3. Dez. 1875 auf 107 273 Seelen. Wenn nun der Zuwachs während diesen 12 Jahren als ganz gleichmässig angenommen wird, wieviel % betrug der Zuwachs jährlich?

Erkl. 124. Umstehende Gleichung 1). hätte man auch direkt mit Benutzung der Hauptzinseszinsformel erhalten.

Man siehe Dr. *Kleyer*'s Lehrbuch der „Zinseszins- und Rentenrechnung."

Formel:

$$t = a \cdot q^{n-1}$$ (siehe Formel 1, Seite 18.)

Auflösung. Nimmt man an, der jährliche Zuwachs betrage x %, so heisst dies nichts anderes als: 100 Personen haben sich in einem Jahr um x Personen vermehrt, und hieraus ergibt sich, dass 100 Personen zu $100 + x$ angewachsen sind, dass 1 Person zu $\frac{100+x}{100}$ angewachsen ist, dass somit die am 3. Dez. 1864 vorhandenen Seelen nach einem Jahr zu:

a). . . $69084 \cdot \frac{100+x}{100}$ Seelen

angewachsen sind.

Da nun während des 2ten Jahres wiederum 1 Person zu $\frac{100+x}{100}$ Personen anwächst, so wachsen die soeben unter a). gefundenen Seelen, aus welchen die Bevölkerung Stuttgarts am 3. Dez. des Jahres 1865 bestand, bis zum 3. Dez. des 2ten Jahres (1866) an, zu:

$$69084 \cdot \frac{100+x}{100} \cdot \frac{100+x}{100}$$

oder zu:

b). . $69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^2$ Seelen.

In analoger Weise findet man, dass die Bevölkerung am 3. Dez. des 3ten Jahres (1867), des 4ten Jahres (1868), ... bezw. angewachsen war zu:

c). . $69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^3$

d). . $69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^4$ Seelen, u. s. f.

Hieraus ersieht man, dass die Seelenzahl am 3. Dez. 1864 und die aufeinanderfolgenden Seelenzahlen am 3. Dez. eines jeden folgenden Jahres die geometrische Reihe:

$$69084,\ 99084 \cdot \frac{100+x}{100},\ 69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^2,$$
$$69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^3, \ldots\ldots$$

bilden, in welcher das 12. Glied, nämlich:

$$69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^{12}$$

d. i. die Seelenzahl nach 11 Jahren vom 3. Dez. 1864 ab, also die Seelenzahl am 3. Dez. 1875 gegeben, nämlich = 107273 ist.

Für x besteht somit die Bestimmungsgleichung:

$$1). \quad 69084 \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^{12} = 107273$$

(siehe Erkl. 124)

und hieraus erhält man zunächst:

$$\frac{100+x}{100} = \sqrt[12]{\frac{107273}{69084}}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$\frac{100+x}{100} = 1{,}03735$$

mithin ist:

$$100+x = 1{,}03735 \,.\, 100 = 103{,}735$$

oder:

$$x = 103{,}735 - 100 = 3{,}735$$

In den Jahren 1864 bis 1875 betrug somit der jährliche Zuwachs der Bevölkerung Stuttgarts =

3,735 oder ca. $3\frac{3}{4}$ Prozent.

Hülfsrechnung.

$$log \frac{100+x}{100} = \frac{1}{12} \cdot \left(log\, 107273 - log\, 69084\right)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 107273 &= 5{,}0304783 \\ & \quad\quad\quad\; 121{,}5 \\ & \quad 5{,}0304905 \\ - log\, 69084 &= -4{,}8393775 \\ & \quad 0{,}1911130 \\ & \quad\quad\quad \cdot \tfrac{1}{12} \\ log \frac{100+x}{100} &= 0{,}0159261 \\ & \quad\quad\quad\; 9044 \\ & \quad\quad\quad\;\; 217 \\ & \quad\quad\quad\; 209{,}5 \end{aligned}$$

mithin ist:

$$num\, log \frac{100+x}{100} = 1{,}03735$$

Aufgabe 61. Von einer gewissen homöopatischen Essenz wird ein Tropfen in ein sogenanntes 1000-Tropfengläschen gebracht und dies mit Wasser gefüllt. Nachdem sich die Essenz mit dem Wasser gehörig vermischt hat, wird 1 Tropfen dieser Mischung in einem zweiten 1000-Tropfengläschen auf gleiche Weise verdünnt. Dieses Verfahren wird 10 mal wiederholt, und von der letzten Mixtur empfängt nun ein Patient jedesmal 10 Tropfen als Arznei. Wieviel der ursprünglichen Essenz erhält jener Patient in einer solchen Dosis der Arznei?

Auflösung. Wird 1 Tropfen der Essenz in ein 1000-Tropfengläschen gebracht und dasselbe mit Wasser gefüllt, so erhält man eine Mischung von 1000 Tropfen. Jeder Tropfen dieser **ersten** Mischung enthält also:

a). . $\frac{1}{1000}$ des Tropfens jener Essenz.

Wird nun 1 Tropfen dieser 1ten Mischung in ein anderes 1000-Tropfengläschen gebracht und dasselbe mit Wasser gefüllt, so erhält man abermals

eine Mischung von 1000 Tropfen. Jeder Tropfen dieser 2ten Mischung enthält also

$\frac{1}{1000}$ eines Tropfens der 1. Mischung,

beziehungsweise:

$$\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \text{ oder:}$$

b). . $\frac{1}{1000^2}$ des Tropfens jener Essenz.

Wird nun 1 Tropfen dieser 2ten Mischung in ein weiteres 1000-Tropfengläschen gebracht und dasselbe mit Wasser gefüllt, so erhält man in analoger Weise, dass jeder Tropfen dieser 3ten Mischung:

c). . $\frac{1}{1000^3}$ des Tropfens jener Essenz

enthält, u. s. f., u. s. f.

Hieraus ersieht man, dass wenn man 1 Tropfen der Essenz mit a bezeichnet, dieser Tropfen a und je ein Tropfen der 1ten, 2ten, 3ten, ... Mischung in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

$$a, \quad \frac{1}{1000} a, \quad \frac{1}{1000^2} a, \quad \frac{1}{1000^3} a,$$
$$\frac{1}{1000^4} a, \ldots\ldots$$

bilden und dass man somit für das 11te Glied dieser Reihe, d. i. für einen Tropfen der 10ten Mischung =

$$\frac{1}{1000^{10}} a \text{ erhält.}$$

Da nun der Patient diese 10te Mischung als Arznei empfängt und jedesmal 10 Tropfen davon nehmen soll, so erhält man für eine solche gesuchte Dosis x:

$$x = 10 \cdot \frac{1}{1000^{10}} a$$

d. h. jede Dosis von 10 Tropfen der Arznei enthält:

$$\frac{1}{1000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,00}$$

eines Tropfens a jener Essenz.

Aufgabe 62. Aus einem vollen Weinfass, das 1000 Liter Wein enthält, wird 1 Liter gezapft, dafür aber 1 Liter Wasser zugegossen. Von der somit erhaltenen Mischung wird abermals ein Liter gezapft und dafür Wasser zugegossen. Wenn nun dieses Verfahren 90 mal wiederholt wird, wieviel von dem ursprünglichen Wein ist alsdann noch in dem Fass?

Formel:

$$t = a \cdot q^{n-1}$$ (siehe Formel 1, Seite 18.)

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Anzahl x der Liter Wein, welche schliesslich in dem vollen mit Wein und Wasser gefüllten Fasse enthalten sind, dient folgende Betrachtung:

Nachdem aus dem vollen Weinfass 1 Liter Wein abgezapft und durch Wasser ersetzt ist, befinden sich in dieser 1. Mischung unter 1000 Liter dieser 1. Mischung 999 Liter Wein, also befinden sich:

a). unter 1 Liter der 1. Mischung $\frac{999}{1000}$ Liter Wein

und

b). „ 1000 „ „ „ „ $\frac{999}{1000} \cdot 1000$ „

und

c). „ $\frac{999}{1000}$ „ „ „ „ $\frac{999}{1000} \cdot \frac{999}{1000} =$

$\left(\frac{999}{1000}\right)^2$ Liter Wein.

Nachdem nun von dieser aus 1000 Liter bestehenden 1. Mischung wiederum 1 Liter abgezapft und durch Wasser ersetzt ist, befinden sich in dieser 2. Mischung unter 1000 Liter dieser Mischung 999 Liter der 1. Mischung, also befinden sich unter 1 Liter der 2. Mischung $\frac{999}{1000}$ Liter der 1. Mischung; da aber nach der Angabe unter c). diese $\frac{999}{1000}$ Liter der 1. Mischung $\left(\frac{999}{1000}\right)^2$ Liter Wein enthalten, so ergibt sich hieraus, dass sich:

a_1). unter 1 Liter der 2. Mischung $\left(\frac{999}{1000}\right)^2$ Liter Wein

und

b_1). „ 1000 „ „ „ „ $\left(\frac{999}{1000}\right)^2 \cdot 1000$ „

und

c_1). „ $\frac{999}{1000}$ „ „ „ „ $\left(\frac{999}{1000}\right)^2 \cdot \frac{999}{1000} =$

$\left(\frac{999}{1000}\right)^3$ Liter Wein befinden.

Nachdem nun von dieser aus 1000 Liter bestehenden 2. Mischung abermals 1 Liter abgezapft und durch Wasser ersetzt ist, befinden sich in dieser 3. Mischung unter 1000 Liter dieser Mischung 999 Liter der 2. Mischung, also befinden sich unter 1 Liter der 3. Mischung

$\frac{999}{1000}$ Liter der 2. Mischung; da aber nach der Angabe unter c_1). diese $\frac{999}{1000}$ Liter der 2. Mischung $\left(\frac{999}{1000}\right)^3$ Liter Wein enthalten, so ergibt sich hieraus, dass sich:

a_2). unter 1 Liter der 3. Mischung $\left(\frac{999}{1000}\right)^3$ Liter Wein und

b_2). „ 1000 „ „ „ „ $\left(\frac{999}{1000}\right)^3 . 1000$ „ „ und

c_2). „ $\frac{999}{1000}$ „ „ „ „ $\left(\frac{999}{1000}\right)^3 \cdot \frac{999}{1000} = \left(\frac{999}{1000}\right)^4$ Liter Wein befinden.

Setzt man diese Betrachtung in analoger Weise fort, so findet man, dass analog den Angaben unter b)., b_1)., b_2). unter 1000 Liter der 4., 5., ... Mischung sich bezw.

$\left(\frac{999}{1000}\right)^4 \cdot 1000$, $\left(\frac{999}{1000}\right)^5 \cdot 1000$, ... Liter Wein befinden.

Hieraus ist ersichtlich, dass die in Liter ausgedrückten Weinmengen, welche sich am Anfang und nach jeder Mischung in dem Fasse befinden, in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Reihe:

$$1000,\ 1000 \cdot \frac{999}{1000},\ 1000 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^2,\ 1000 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^3,\ 1000 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^4, \ldots$$

bilden.

Da nun die gesuchte Weinmenge x, welche nach der 90sten Mischung noch in dem Fasse enthalten ist, durch das $90 + 1$, also durch das 91ste Glied dieser Reihe ausgedrückt ist, so hat man die Gleichung:

$$1). \quad . \quad . \quad x = 1000 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^{90}$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hülfsrechnung, dass nach der 90sten Mischung in dem Fasse noch

$$x = 913{,}89 \text{ Liter Wein}$$

enthalten sind.

Hülfsrechnung.

$$\log x = \log 1000 + 90 . (\log 999 - \log 1000)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 999 &= \overset{(+1)}{2{,}999565}\overset{(-1)}{5} \\
-\log 1000 &= -3{,}0000000 \\
&\quad\ 0{,}9995655 - 1 \\
&\quad\ .\,90 \\
&\quad\ 89{,}9608950 - 90 \\
+\log 1000 &= 3{,}0000000 \\
\log x &= 92{,}9608950 - 90 \\
\text{oder: } \log x &= 2{,}9608950 \\
&\quad\ 8939 \\
&\quad\ 11 \\
&\quad\ 9{,}6
\end{aligned}$$

mithin:

$$num \log x = 913{,}892$$

Ungelöste Aufgaben über die niederen arithmetischen Reihen.

Aufgabe 63. Von einer arithmetischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 2\frac{1}{2}$, die Differenz $d = \frac{1}{3}$ und die Anzahl der Glieder $n = 100$. Welches ist das letzte Glied t, das summatorische Glied s und wie heissen die ersten 10 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 64. Vorstehende Aufgabe 63 für den Fall zu lösen, dass $a = 0$, $d = \frac{1}{5}$ und $n = 19$ ist.

Aufgabe 65. Vorstehende Aufgabe 63 für den Fall zu lösen, dass $a = -\frac{3}{4}$, $d = -2\frac{1}{8}$ und $n = 25$ ist.

Aufgabe 66. Von einer arithmetischen Reihe ist das Anfangsglied $a = -17$, die Differenz $d = 4$ und die Summe aller Glieder $s = -39$. Welches ist die Anzahl n der Glieder, das letzte Glied t und wie heissen die ersten Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 67. Vorstehende Aufgabe 66 für den Fall zu lösen, dass $a = -6$, $d = \frac{3}{4}$ und $s = 146\frac{1}{4}$ ist.

Aufgabe 68. Vorstehende Aufgabe 66 für den Fall zu lösen, dass das Anfangsglied a gleich der gesuchten Anzahl n der Glieder und dass $d = 3$, $s = 235$ ist.

Aufgabe 69. Von einer arithmetischen Reihe ist das Anfangsglied $a = \frac{3}{4}$, die Anzahl der Glieder $n = 40$ und das summatorische Glied $s = 517\frac{1}{2}$. Welches ist das letzte Glied t, die Differenz d und wie heissen die ersten 7 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 70. Von einer arithmetischen Reihe ist die Differenz $d = \frac{2}{7}$, die Anzahl der Glieder $n = 32$, die Summe aller Glieder $s = 160$. Welches ist das erste Glied a, das letzte Glied t und wie heissen die ersten 9 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 71. Vorstehende Aufgabe 70 für den Fall zu lösen, dass $d = 8\frac{2}{8}$, $n = 58$ und $s = 14026\frac{1}{3}$ ist.

Aufgabe 72. Von einer arithmetischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 0$, die Differenz $d = 5$, das letzte Glied $t = 30$. Welches ist die Anzahl n der Glieder, das summatorische Glied s und wie heissen die Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 73. Vorstehende Aufgabe 72 für den Fall zu lösen, dass $a = -9$, $d = 4$ und $t = 27$ ist.

Aufgabe 74. Vorstehende Aufgabe 72 für den Fall zu lösen, dass $a = -\frac{3}{4}$, $d = -\frac{7}{8}$ und $t = -21\frac{3}{4}$ ist.

Aufgabe 75. Von einer arithmetischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 25$, die Anzahl der Glieder $n = 25$, das letzte Glied $t = -35$. Welches ist die Differenz d, das summatorische Glied s und wie heissen die ersten 6 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 76. Vorstehende Aufgabe 75 für den Fall zu lösen, dass $a = 5 - x$, $n = 80$, $t = 5(1 + 63x)$ ist.

Aufgabe 77. Von einer arithmetischen Reihe ist die Differenz $d = 3\frac{1}{2}$, die Anzahl der Glieder $n = 15$, das letzte Glied $t = 38$. Welches ist das Anfangsglied a, das summatorische Glied s und wie heissen die ersten 5 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 78. Vorstehende Aufgabe 77 für den Fall zu lösen, dass $d = \frac{5}{7}$, $n = 23$ und $t = 24$ ist.

Aufgabe 79. Von einer arithmetischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 5$, das Endglied t 23, das summatorische Glied $s = 392$. Welches ist die Differenz d und die Anzahl n der Glieder und wie heissen die ersten 4 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 80. Vorstehende Aufgabe 79 für den Fall zu lösen, dass $a = 12$, $t = -16$ und $s = -30$ ist.

Aufgabe 81. Von einer arithmetischen Reihe ist die Anzahl der Glieder $n = 29$, das letzte Glied $t = 23$ und das summatorische Glied $s = 58$. Welches ist das Anfangsglied a, die Differenz d und wie heissen die ersten 9 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 82. Vorstehende Aufgabe 81 für den Fall zu lösen, dass $n = 5$, $t = -13$ und $s = -125$ ist.

Aufgabe 83. Von einer arithmetischen Reihe ist das Endglied $t = 408$, die Differenz $d = 4$ und das summatorische Glied $s = 21000$. Welches ist das Anfangsglied a, die Anzahl n der Glieder und wie heissen die ersten 5 Glieder der Reihe?

Aufgabe 84. Vorstehende Aufgabe 83 für den Fall zu lösen, dass $t = 18{,}53$, $d = 0{,}27$ und $s = 628{,}43$ ist.

Aufgabe 85. Vorstehende Aufgabe 83 für den Fall zu lösen, dass $t = -37$, $d = -\frac{2}{3}$ und $s = -1024$ ist.

Aufgabe 86. Wie heisst das 25. Glied und die Summe der 25 ersten Glieder der Reihe:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \ldots\ldots ?$$

Aufgabe 87. Welches ist das 24. Glied der Reihe: $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\ldots$ und wie gross ist die Summe der ersten 24 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 88. Das 1. Glied einer arithmetischen Reihe sei $= 4a^2$, das 2. Glied $= 0$ und die Anzahl der Glieder $= 41$. Welches ist das letzte Glied, das summatorische Glied und wie heissen die ersten 8 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 89. Wenn von einer arithmetischen Reihe das 1. Glied $= x + 254$, das letzte Glied $= x - 2$, das vorletzte Glied $= x + 2$ ist; wie gross muss alsdann die Anzahl der Glieder und die Summe sämtlicher Glieder sein?

Aufgabe 90. Eine arithmetische Reihe fängt mit -10 an und endet mit 12; wie gross ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe, wenn man noch weiss, dass die Summe aller Glieder gleich dem letzten Gliede ist?

Aufgabe 91. Wieviel Glieder der arithmetischen Reihe:

$$3,\ 9,\ 15,\ \ldots\ldots\ldots$$

muss man nehmen, damit ihre Summe $= 17987$ sei?

Aufgabe 92. Wieviel Glieder der Reihe:

$$1,\ \frac{4}{7},\ \frac{1}{7},\ \ldots\ldots\ldots$$

muss man addieren, um -69 als Summe zu erhalten?

Aufgabe 93. Das wievielte Glied der Reihe:

$$2,\ 2\frac{1}{2},\ 3,\ 3\frac{1}{2}, \ldots\ldots$$

ist 282? Wieviel Glieder dieser Reihe muss man summieren, um 135 zu erhalten?

Aufgabe 94. Wie gross ist die Differenz derjenigen Reihe, deren erstes Glied $= 16$ und deren 50. Glied $= 40\frac{1}{2}$ ist?

Aufgabe 95. Zwischen die Zahlen 25 und 100 sollen neun weitere Zahlen so eingeschaltet (interpoliert) werden, dass sie mit den gegebenen eine arithmetische Progression bilden; wie heissen diese neun Zahlen?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 9, Seite 15.

Aufgabe 96. Zwischen a und b sollen n Glieder so interpoliert werden, dass eine arithmetische Reihe entsteht; wie heisst dieselbe?

Aufgabe 97. Man soll zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe:

$$5,\ 17,\ 92, \ldots\ldots$$

fünf neue Glieder so einschalten, dass diese Reihe eine arithmetische sei.

Aufgabe 98. Welches wird die Differenz der neu entstehenden Reihe sein, wenn zwischen je 2 Glieder einer gegebenen arithmetischen Reihe, deren Differenz d ist, p neue Glieder eingeschaltet werden?

Aufgabe 99. Die Summe der 26 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe ist $= 728$, wie gross ist die Differenz und das letzte Glied, wenn das 5. Glied $= 11$ ist? Das wievielte Glied jener Reihe ist ferner $= 43$?

Aufgabe 100. Das 7. Glied einer arithmetischen Reihe ist $= -6$, das 37. $= 15\frac{3}{4}$, die Anzahl der Glieder $= 55$. Welches ist das Anfangsglied, die Differenz, das summatorische Glied und wie heissen die ersten 10 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 101. Das 5. Glied einer arithmetischen Reihe ist $20\frac{5}{8}$, das 10. Glied $37\frac{1}{2}$; wie heisst das 1. Glied und welches ist die Differenz dieser Reihe?

Aufgabe 102. Das p^{te} Glied einer arithmetischen Reihe ist $= r$, das q^{te} Glied $= u$ und die Anzahl der Glieder $= n$. Wie gross ist die Differenz, das summatorische Glied, das erste und das letzte Glied dieser gedachten Reihe?

Aufgabe 103. Die Summe des 1. und 8. Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 29, die des 7. und 23. Gliedes = 92. Wie heisst diese Reihe?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 10, Seite 16.

Aufgabe 104. Wie gross ist die Summe der ersten 20 Glieder einer arithmetischen Reihe, von welcher die Summe des 5. und 8. Gliedes = 24 und die Summe des 7. und 12. Gliedes = 36 ist?

Aufgabe 105. Wenn von einer arithmetischen Reihe die Summe des 1. und 9. Gliedes = 61 und die Summe des 8., 10. und 12. Gliedes = 126 ist; wie gross ist das 1. Glied, die Differenz und die Summe der ersten 15 Glieder?

Aufgabe 106. Das 19. Glied einer arithm. Reihe nebst dem 43., nebst dem 57. Gliede macht 827; die Summe des 27., 58., 69. und 73. Gliedes beträgt 1581. Wie heissen die ersten 10 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 107. Die Summe der ersten 9 Glieder einer arithm. Reihe ist 297 und die Summe der ersten 6 Glieder = 261. Man verlangt alle Glieder dieser Reihe vom 1. bis zum 9. zu wissen.

Aufgabe 108. Die Summe der beiden mittleren Glieder einer arithm. Reihe von 12 Glieder ist = 61, die Differenz des 1. und 12. Gliedes = 55; wie heisst die Reihe?

Aufgabe 109. Die Summe der beiden mittleren Glieder einer arithm. Reihe von 20 Glieder beträgt $89\frac{1}{2}$, die Differenz des ersten und letzten Gliedes $85\frac{1}{2}$; wie heisst die Reihe?

Aufgabe 110. In einer arithm. Reihe ist jedes folgende Glied um $\frac{1}{2}$ grösser als das vorhergehende; die Summe der ersten n Glieder der Reihe beträgt 81; wird hierzu die Summe der nächsten 4 Glieder addiert, so erhält man 124. Wie heisst das Anfangsglied und welches ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 111. Das 1. Glied einer arithm. Reihe ist = $\frac{1}{2}$, die Summe der ersten 8 Glieder = 130; wie gross ist die Summe vom 8. bis zum 30. Gliede, wenn diese beiden Glieder mitgerechnet werden?

Aufgabe 112. In einer arithm. Reihe beträgt die Summe aus dem 1. und 5. Gliede = 16; das Produkt aus dem 1. und 3. Gliede = 21. Welches ist das Anfangsglied und welches die Differenz dieser Reihe?

Aufgabe 113. Die Summe des 7. und 13. Gliedes einer arithm. Reihe beträgt 130, das Produkt des 6. und 15. Gliedes beträgt 3700; wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 114. Die Summe des 2. und des 20. Gliedes einer arithm. Reihe sei = 10, das Produkt beider Glieder = $23\frac{47}{46}$; wie gross ist die Summe der ersten 16 Glieder der Reihe?

Aufgabe 115. Das 1. und 4. Glied einer arithm. Reihe habe zur Summe s, das 2. und 3. zum Produkt p; wie gross ist die Summe S der ersten 5 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 116. In einer arithm. Reihe von 20 Gliedern ist das Produkt der beiden mittleren Glieder 725, die Summe des 3. und 12. Gliedes = 30. Wie heisst das 1. Glied und die Differenz der Reihe?

Aufgabe 117. Wieviel Glieder der arithm. Reihe, von welcher das 3. und 7. zusammen 46 betragen und von welcher das 2. Glied zum 6. sich wie 2 : 7 verhält, hat man zu nehmen, um 1575 zu erhalten?

Aufgabe 118. Die Summe des 1. und 9. Gliedes einer arithm. Reihe beträgt 70; der Quotient des 2. Gliedes in das 13. Glied beträgt 9. Wie heisst die Reihe?

Aufgabe 119. In einer arithm. Reihe ist die Summe aus dem 3. und 7. Gliede = 18 und das Quadrat des 6. Gliedes = 121; wie gross ist die Summe der ersten 10 Glieder?

Aufgabe 120. Das Produkt des 4. und 11. Gliedes einer arithm. Reihe sei = $18\frac{1}{2}$, das 6. Glied = 6; wie lautet die Reihe und wie gross ist die Summe von 53 Gliedern derjenigen Reihe, welche aus der gegebenen durch Interpolation von je 9 Gliedern entsteht?

Aufgabe 121. In einer arithm. Reihe ist die Differenz zwischen dem Quadrat des 15. und dem des 11. Gliedes = 400, die Summe des 9. und 12. Gliedes = 40. Welches ist das Anfangsglied und welches die Differenz der Reihe?

Aufgabe 122. In einer arithm. Reihe von 5 Gliedern ist das Produkt aller Glieder = p, die Summe aller Glieder = s; wie heissen die 5 Glieder dieser Reihe?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 26, Seite 67.

Aufgabe 123. Wie heisst die aus 4 Gliedern bestehende arithm. Reihe, in welcher das Produkt sämtlicher Glieder = 3640 und die Summe der beiden mittleren Glieder = 17 ist?

Aufgabe 124. Von einer aus $(4n+1)$ Gliedern bestehenden arithmetischen Reihe ist die Summe des 1., 5., 9. Gliedes $= m$, die Summe des 2., 4., 6. Gliedes $= p$ und die Summe der Quadrate des 1., mittelsten und letzten Gliedes $= q$ gegeben; wie heisst das Anfangsglied und die Differenz dieser Reihe, und wie heisst die Reihe, wenn $n = 3$, $m = 4$, $p = 6$ und $q = 75$ gesetzt wird?

Aufgabe 125. Von zwei arithm. Reihen, welche gleiche Endglieder besitzen, hat die eine zum Anfangsgliede 9 und zur Summe 25, die andere zum Anfangsgliede 8 und zur Summe 36. Wie gross ist in beiden Reihen die Anzahl der Glieder?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 28, Seite 70. Die Lösung führt auf eine diophantische Gleichung.

Aufgabe 126. Welches ist die Summe aller Zahlen von 1 bis incl. 1250?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 8, Seite 15.

Aufgabe 127. Welches ist die Summe aller zwischen 0 und 1000 liegenden ungeraden Zahlen?

Aufgabe 128. Welches ist die Summe aller zwischen 0 und 1001 liegenden geraden Zahlen?

Aufgabe 129. Wie gross ist die Summe:
1). der n ersten ganzen Zahlen,
2). „ n „ geraden „ und
3). „ n „ ungeraden Zahlen?

Aufgabe 130. Addiert man eine gewisse Anzahl der ersten unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden und dazu dieselbe Anzahl der ersten unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, so erhält man zur Summe 78. Wie gross ist jene Anzahl der ungeraden, bezw. der geraden ersten Zahlen?

Aufgabe 131. Dividiert man eine 3ziffrige Zahl durch die Summe ihrer Ziffern, so erhält man 26 zum Quotienten; addiert man 396 zu jener 3ziffrigen Zahl, so erhält man eine Zahl mit denselben drei Ziffern, nur in umgekehrter Reihenfolge. Wie heisst jene 3ziffrige Zahl, wenn man weiss, dass ihre Ziffern eine arithmetische Reihe bilden?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 13, Seite 46.

Aufgabe 132. Die Summe der Ziffern einer 3ziffrigen Zahl, welche eine arithm. Reihe bilden, sei = 9 und das Produkt aus der letzten und der Summe der beiden ersten Ziffern sei = 20. Wie heisst diese Zahl?

Aufgabe 133. Die Summe von 4 Zahlen, welche eine arithmetische Reihe bilden, ist 36, die Summe ihrer Quadrate = 404; welche Zahlen sind dies?

Aufgabe 134. Von 6 Zahlen, welche eine arithmetische Reihe bilden, beträgt die Summe 141, die Summe der Quadrate dieser Zahlen beträgt 3751; wie heissen diese 6 Zahlen?

Aufgabe 135. Acht Zahlen bilden eine arithmetische Reihe. Die Summe der Quadrate der äusseren Glieder ist = 2713, die der mittleren Glieder = 1537; welches sind diese 8 Zahlen?

Aufgabe 136. Fünf Zahlen stehen in arithmetischer Reihe, die Summe der Quadrate der beiden äusseren Glieder ist 80, die der Quadrate des 2. und 4. Gliedes = 26. Wie heissen diese 5 Zahlen?

Aufgabe 137. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Reihe, deren Differenz = 6 ist, das Produkt aller 4 Zahlen beträgt 640. Wie heissen diese 4 Zahlen?

Aufgabe 138. Drei Zahlen bilden eine arithmetische Reihe; die Summe der Quadrate der 1. und 2. Zahl ist 689, die der 2. und 3. Zahl = 929. Wie heissen diese 3 Zahlen?

Aufgabe 139. Die Ziffern einer vierziffrigen Zahl bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine steigende arithmetische Reihe, deren Summe in der Zahl selbst $149\frac{1}{8}$mal enthalten ist; schreibt man die Ziffern in umgekehrter Ordnung, so entsteht eine Zahl, welche um 6174 grösser ist als diese vierziffrige Zahl. Wie heisst dieselbe?

Aufgabe 140. Man soll untersuchen, ob die Werte für y, welche sich aus der Gleichung:

$$y = 7x + 3$$

ergeben, wenn für x nach und nach die eine arithmetische Reihe bildenden Werte:

$$0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\ldots$$

gesetzt werden, ebenfalls eine arithmetische Reihe bilden?

Aufgabe 141. Man soll untersuchen, ob die Werte für y, welche sich aus der Gleichung:

$$y = ax + b$$

ergeben, wenn für x nach und nach die eine arithmetische Reihe bildenden Werte:

$$c,\ c+d,\ c+2d,\ c+3d,\ \ldots\ldots$$

gesetzt werden, ebenfalls eine arithmetische Reihe bilden.*). Ist dies der Fall, so soll man das allgemeine (n^{te}) Glied, das Anfangsglied und die Differenz dieser Reihe angeben.

*). Der aus dieser Aufgabe sich ergebende Satz findet Anwendung in der *regula falsi* (in der Regel vom falschen Satz). — Man vergleiche hiermit den Anhang des Lehrbuchs der „Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.“

Aufgabe 142. Man soll die Differenzen der Quadratzahlen der aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots\ldots$$

bilden und untersuchen, ob diese Differenzen eine arithmetische Reihe bilden. **).

**). Man vergl. hiermit den Abschnitt: „Die höheren arithmetischen Reihen“ in dem Anhang dieses Buches.

Aufgabe 143. Die arithmetische Reihe:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots$$

ist gegeben; man soll die Differenzen der Quadrate der Glieder dieser Reihe bilden und untersuchen, ob diese Differenzen eine arithmetische Reihe bilden. **).

Aufgabe 144. Ein Werkmeister, welcher seinen Dienst 18 Jahre lang gewissenhaft versehen hatte, erhielt im 1. Jahre seines Dienstes 60 Mark Gratifikation, in jedem folgenden Jahre 9 Mark mehr. Welches war die letzte Gratifikation und wie gross war die Gesamtsumme, welche er für seinen Dienst als Belohnung erhalten hatte?

Aufgabe 145. Ein Beamter ersparte sich im 1. Jahre seines Dienstantritts 100 Mark und in jedem folgenden Jahre 10 Mark mehr als im nächst vorhergehenden; wieviel legte er im 10. Jahre zurück und wieviel hat er sich in diesen 10 Jahren erspart?

Aufgabe 146. Ein junger Techniker hat einen Anfangsgehalt von 900 Mark und erhält wegen seines Fleisses und seiner Brauchbarkeit jedes Jahr eine Zulage von 60 Mark. Mit den Jahren wachsen aber auch seine Ausgaben und während er im 1. Jahr mit 750 Mark auskam, gebraucht er in jedem folgenden Jahr 75 Mark mehr als im vorhergehenden. Nach wieviel Jahren werden seine jährlichen Ausgaben mit seiner jährlichen Einnahme gleich sein und wie hoch beläuft sich dann seine Einnahme (Ausgabe)?

Aufgabe 147. Ein Brunnen von 15 m Tiefe soll gegraben werden. Wie teuer kommt das Graben des Brunnens, wenn der 1. Meter 8 Mark, jeder folgende Meter aber 20 Pfennig mehr als der nächst vorhergehende kosten soll?

Aufgabe 148. Für das Aufbauen eines Turmes zahlte man für den 1. Meter 155 Mark, für jeden folgenden Meter 25 Mark mehr als für den nächst vorhergehenden. Wie hoch kam der letzte Meter und der ganze Aufbau zu stehen, wenn der Turm eine Höhe von 60 Meter erreichte?

Aufgabe 149. Ein Dach, welches die Form eines Paralleltrapezes hat, soll mit Ziegeln neu belegt werden. Die kürzere der parallelen Seiten, nämlich die am Giebel des Daches liegende Ziegelreihe, muss 30 Ziegeln und jede folgende Ziegelreihe 3 Ziegeln mehr erhalten. Wenn nun zur Bedeckung des paralleltrapezförmigen Daches 60 Ziegelreihen erforderlich sind, so soll man berechnen, wieviel Ziegeln in die letzte Reihe zu liegen kommen und wieviel Ziegeln überhaupt zur Bedeckung des Daches erforderlich sind.

Aufgabe 150. Ein Vater schenkte jedem seiner Söhne Bücher zum Geburtstage und zwar soviel Bände als derselbe Jahre zählt. Auf diese Weise hat sich für die 5 Söhne, von denen jeder der älteren immer 3 Jahre mehr zählt als der nächst jüngere, eine Bibliothek von 375 Bänden angesammelt. Wie alt waren die Söhne?

Aufgabe 151. Ein Schüler, der seiner Homerlektüre an jedem Wochentage regelmässig eine Stunde widmet und das tägliche Pensum mit jeder neuen Woche um 5 Verse steigert, hat in der letzten Woche täglich 50 Verse und in der ganzen Zeit 1620 Verse übersetzt. Wieviel Wochen beschäftigte er sich mit seiner Homer-Lektüre?

Aufgabe 152. Unter 16 Arbeiter soll zur Belohnung eine Summe von 1000 Mark verteilt werden und zwar in Anbetracht ihrer Leistungen so, dass jeder folgende immer 5 Mark mehr erhält als der nächst vorhergehende. Wieviel erhält der letzte, der beste, und wieviel der erste?

Aufgabe 153. Ein Menschenfreund verteilte in einem Waisenhause unter die daselbst befindlichen Kinder 99 Mark, und zwar so, dass das älteste eine bestimmte Summe, das nächst jüngere 1 Mark weniger u. s. f. erhielt. Wieviel erhielt das älteste Kind und welches war die Anzahl der Kinder?

Aufgabe 154. Ein Jugendfreund übergab einem Lehrer eine gewisse Summe Geldes, um sie unter seine 25 armen Schüler auf folgende Weise zu verteilen: Der Lehrer soll eine schriftliche Ausarbeitung machen lassen, die

Schüler nach der Qualität ihrer Arbeit klassifizieren und dem 1. das Meiste geben, dem 2. etwas weniger, dem 3 um ebensoviel weniger, u. s. f. Auf diese Weise erhielt der 3. und 14. zusammen 32 Mark, der 7. und letzte zusammen 20 Mark. Wieviel erhielten jeder der ersten 5 Schüler und wieviel alle zusammen?

Aufgabe 155. Unter eine gewisse Anzahl von Soldaten, die bei der Erstürmung einer feindlichen Batterie sich besonders hervorthaten, soll eine bestimmte Summe als Belohnung verteilt werden, und zwar in Anbetracht ihres verschiedenen Opfermutes so, dass jeder eine gewisse Summe weniger erhält als der, welcher vor ihm die feindliche Batterie erreichte.

Da nun der 7. und der 12. schwer verwundet und nicht gegenwärtig waren, so nahmen der 4. und 8. bezw. deren Belohnungen in Empfang, um es jenen zu überbringen. Hierdurch erhielt der vierte $12\frac{9}{20}$ und der achte $12\frac{9}{10}$ Doppelkronen. Wenn nun die zu verteilende Summe $95\frac{1}{4}$ Doppelkronen betrug, wieviel hatte jeder der Soldaten zu beanspruchen und wieviel Soldaten waren es?

Aufgabe 156. Ein Spieler setzt bei seinem 1. Spiele 1 Mark und verliert, hierauf setzt er 2 Mark und verliert wieder, dann setzt er 3 Mark und verliert abermals u. s. f. Bei dem wievielten Spiele kann er im Falle eines Gewinnes all sein verlorenes Geld wieder erhalten, wenn die Bank den 10fachen Einsatz bezahlt und wenn er bei seinem fortgesetzten Verlust jedesmal 1 Mark mehr als bei dem vorhergehenden setzt?

Aufgabe 157. In einer Lotterie sind n Gewinne, welche immer um d Mark wachsend, zusammen s Mark betragen; wie gross ist der grösste und der kleinste dieser Gewinne? — Sollte aber der höchste der n Gewinne $\frac{1}{m}$ der ganzen Gewinn-Summe betragen, wie gross müsste dann der niedrigste Gewinn sein, wenn sie ebenfalls um gleichviel steigen sollten; und um wieviel steigen sie dann?

Aufgabe 158. Ein Vater wurde nach dem Alter seiner Kinder gefragt und gab hierauf zur Antwort: Ich habe 11 Kinder, jedes folgende ist 2 Jahre jünger als das vorhergehende. Nimmt man das Alter aller meiner Kinder zusammen, so beträgt dasselbe nach 20 Jahren mehr als das doppelte meines Alters. Wie alt sind nun meine Kinder und welches ist mein Alter, wenn mein 4. und 8. Kind zusammen 22 Jahre zählen?

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } **Rentenrechnung als Fortsetz.**
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 126. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 132. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 140. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 144. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 148. } **einer Unbekannten.** Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 154. } **gaben, gelöst durch geometr.**
„ 155. } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 157. } **gaben, gelöst durch algebr.**
Analysis. (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten implizieter Funktionen.

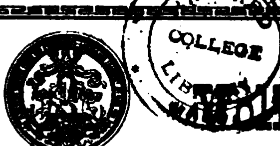
u. s. w., u. s. w.

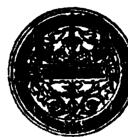
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

115. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Forts. v. Heft 112. — Seite 145—160.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die

arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 112. — Seite 145—160.

Inhalt:

Ungelöste Aufgaben über die niederen arithmetischen Reihen. — Ungelöste Aufgaben über die niederen geometrischen Reihen.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des** Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.**

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit **Dank** von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der **Namen verbreitet.** — **Wünsche, Fragen** etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung thunlichst berücksichtigt.**

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 159. Es legt Jemand ein Kapital auf Zinsen und vermehrt dasselbe jährlich um 120 Mark. Wie gross war dieses Kapital, wenn dasselbe nach Ablauf von 18 Jahren zu einer Summe von 3000 Mark angewachsen ist?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 81, Seite 73.

Aufgabe 160. Ein Rentner, welcher ein Vermögen von 116100 Mark zu $4\frac{1}{2}$ % auf Zinsen ausstehen hatte, legte zu diesem Kapital am Ende eines jeden Jahres 12600 Mark zu demselben Zinsfuss. Nach 17 Jahren starb er. Wieviel Zinsen hatte er innerhalb dieser Zeit im Ganzen bezogen?

Aufgabe 161. Eine Schuld von $a = 441$ Mark wird, ohne Zinsen zu rechnen, in der Art bezahlt, dass am Ende des ersten Monats $b =$ 12 Mark, am Ende jedes folgenden Monats aber je $c = 3$ Mark mehr abgezahlt werden. Wie gross ist die letzte Zahlung?

Aufgabe 162. Jemand leiht 3600 Francs Kapital zu 5 % aus und vermehrt dieses Kapital am Schlusse jeden Jahres um ein weiteres ebenfalls zu 5 % verzinsliches Kapital von 600 Mark. Wie hoch wächst dasselbe bei einfacher Verzinsung im Laufe von 12 Jahren an?

Aufgabe 163. Ein Junggeselle vermacht einer Anstalt sein aus 36000 Mark bestehendes Vermögen unter der Bedingung, dass sie ihm 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe ausbezahlen soll. Wie hoch beläuft sich diese Summe, wenn die Anstalt bei einfacher Zinsberechnung zu 5 % weder gewinnen noch verlieren will?

Aufgabe 164. In eine Kasse zahlte Jemand am 1. Januar 1871 die Summe von 4500 Mark ein und verpflichtet sich, am 1. Januar jedes folgenden Jahres bis zum 1. Januar 1883 eine Prämie von 450 Mark einzuzahlen. Wenn nun die betreffende Kasse am 1. Januar 1884 die gemachten Einzahlungen mit 13644 Mark honoriert, so wird gefragt: wieviel % brachte die Kasse bei einfacher Zinsberechnung in Anschlag?

Aufgabe 165. Infolge eines Legats erhält Jemand aus einer reichen Familienstiftung am 1. Januar 1872 die Summe von 18000 Mark zum Ankauf eines Hauses und am 1. Januar jedes folgenden Jahres die Summe von 3600 Mark zur Abtragung des jeweiligen fälligen Ziels. Zur Zeit der Tilgung des letzten Ziels am 1. Januar 1884 stirbt der Empfänger kinderlos und das gekaufte Haus fällt der Familienstiftung wieder zu. Dieselbe ist in der Lage, dieses Haus sofort wieder verkaufen zu können und erhält hierfür nicht allein die ausgezahl-

ten Barsummen, sondern auch noch die einfachen 5 % Zinsen dieser Barsummen. Welches war die bei dem Verkauf des Hauses gelöste Summe?

Aufgabe 166. Der Vormund eines jungen Mannes legte dessen elterliches Vermögen am 1. Juli 1874 zu 5 % an; hierzu kamen am 1. Juli jedes folgenden Jahres 360 Mark. Wieviel betrug das elterliche Vermögen des jungen Mannes, wenn bei der letzten Einzahlung am 1. Juli 1884 sein Vermögen auf 15210 Mark angewachsen ist?

Aufgabe 167. In eine Versorgungsanstalt zahlt ein Vater für seinen 10 Jahre alten erblindenden Sohn die Summe von 100 Mark und am Ende jedes weiteren Jahres 25 Mark mehr als im nächst vorhergehenden. Wie alt war der Sohn, als ihm beim Tode seines Vaters von der Versorgungsanstalt die Summe von 6750 Mark eingehändigt wurde, wenn auf die Zinsen keine Rücksicht genommen wird?

Aufgabe 168. Die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Reihe. Der Umfang ist = 84 m; wie gross sind die 3 Seiten des Dreiecks?

Aufgabe 169. Ein Bote legt einen Weg von $36\frac{3}{4}$ Meilen in 6 Tagen so zurück, dass er jeden folgenden Tag $\frac{3}{4}$ Meilen mehr macht als am vorhergehenden. Wieviele Meilen legte er am ersten und wieviele am letzten Tage seiner Wanderung zurück?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 10, Seite 42.

Aufgabe 170. Ein von einer schweren Krankheit sich erholender Mann will sich wieder an Bewegung und frische Luft gewöhnen. Zu diesem Zweck macht er den ersten Tag 800 Schritte und jeden folgenden Tag 300 Schritte mehr als am nächst vorhergehenden. Nach wieviel Tagen wird er 18000 Schritte machen, bezw. einen Weg von ca. $1\frac{1}{2}$ Meile zurücklegen können?

Aufgabe 171. Ein Reisender legte 64 km zurück und zwar den letzten Tag 9 km. Wie lange war er unterwegs und wieviele Kilometer legte er am 1. Tage zurück, wenn er an jedem folgenden Tage $\frac{2}{3}$ km weiter reiste als am nächst vorhergehenden?

Aufgabe 172. Eine Strecke $a = 960$ m wird von einem Körper durchlaufen, der in der 1. Sekunde $b = 25$ m und in jeder folgenden Sekunde $c = 10$ m mehr als in der nächst vorhergehenden zurücklegt. Wieviel Sekunden braucht der Körper dazu?

Aufgabe 173. Zwei Körper bewegen sich von 2 Punkten, deren Entfernung $d = 1190$ m ist, einander entgegen. Der eine legt in der 1. Minute $a = 20$ m und in jeder folgenden $b = 10$ m mehr als in der vorhergehenden zurück; der andere in der 1. Minute $c = 90$ m und in jeder folgenden $f = 8$ m weniger. Nach wieviel Minuten treffen beide Körper zusammen?

Aufgabe 174. Zwei Orte A und B sind 870 km von einander entfernt. Ein Bote geht von A aus und legt am 1. Tage 80 km zurück, am 2. Tage 75, am 3. Tage 70 km, u. s. f. Ein anderer Bote geht 3 Tage später von B ab dem 1. Boten entgegen und macht am 1. Tage 40 km, am 2. Tage 46, am 3. Tage 52 km, u. s. f. Wo und wann treffen beide Boten zusammen?

Aufgabe 175. Zwei Orte A und B sind 159 Meilen entfernt. Ein Bote geht von A aus und macht am 1. Tage 12, am 2. Tage $11\frac{1}{2}$, am 3. Tage 11 Meilen, u. s. f. Ein anderer Bote geht 4 Tage später von B aus dem ersten entgegen und macht am 1. Tage 4, am 2. Tage $4\frac{1}{3}$, am 3. Tage $4\frac{2}{3}$ Meilen, u. s. f.

Wo und wieviel Tage nach Abgang des 2. Boten treffen beide zusammen?

Aufgabe 176. Zwei Freunde A und B, welche 10 Meilen entfernt von einander wohnen, verabreden, nach einem von dem Wohnorte des A 88 Meilen entfernt liegenden Orte zu reisen. A erwartet den B, da aber B nicht zur rechten Zeit eintrifft, so reist A allein ab und legt am 1. Tage $3\frac{2}{3}$, an jedem folgenden Tage $\frac{3}{4}$ Meilen mehr zurück. 4 Tage nach seiner Abreise trifft B in dem Wohnorte des A ein und reist, um gleichzeitig mit A am Ziele anzugelangen, am 1. Tage 5 Meilen und jeden folgenden Tag $1\frac{5}{7}$ Meilen mehr.

Nach wieviel Tagen kommen A und B in dem betreffenden Orte an?

Aufgabe 177. Ein Wanderer, der am 1. Tage seiner Reise nur 8 Meilen zurücklegt, beschleunigt seine Reise täglich so, dass er am 30. Tage 16 Meilen abmacht. Wieviel Meilen legt der Wanderer in den 30 Tagen zurück und wieviel Meilen ging er an jedem Tag weiter als am nächst vorhergehenden?

Aufgabe 178. Ein Bote A reist von Stuttgart ab und macht am 1. Tage nur 1, am 2. Tage 2, am 3. Tage 3 Meilen, u. s. f. — 5 Tage später wird ihm ein anderer Bote B nachgeschickt, welcher täglich 12 Meilen zurücklegt; nach wieviel Tagen holt der 2. Bote den ersten ein?

Aufgabe 179. Zwei Körper bewegen sich zu gleicher Zeit von zwei Punkten A und B auf der geraden Linie AB hintereinander fort und zwar folgt der von A aus sich bewegende Körper dem von B ausgehenden. Der erstere durchläuft in der 1. Minute 1 m, in der 2. Minute 3 m, in der 3. Minute 5 m u. s. f., so dass seine Geschwindigkeit in einer arithmetischen Reihe wächst. Der 2. durchläuft in der 1. Minute 3 m, in der 2. 4 m, in der 3. 5 m, u. s. f. Nach wieviel Minuten wird der von A ausgehende Körper den anderen einholen, wenn die Entfernung von A nach $B = 75$ m ist?

Aufgabe 180. Auf einer geraden Linie bewegen sich von dem Punkte A ausgehend 2 Körper M und N in derselben Richtung. Der Körper M legt in der 1. Sekunde 11 m und in jeder folgenden 1 m weniger zurück. Der Körper N beginnt seine Bewegung 3 Sekunden später als M und legt in der 1. Sekunde 10 m und in jeder folgenden 1 m mehr zurück. In welcher Entfernung von A holt der Körper N den Körper M ein?

Aufgabe 181. Zwei Freunde A und B machen folgende Wette: A will nach einem 3500 m entfernten Ort gehen und wieder zurück sein, bevor B 190 Aepfel, welche je $\frac{1}{2}$ m in einer Reihe von einander entfernt liegen, in einen beim 1. Apfel stehenden und stehenbleibenden Korb gesammelt hat. Wer gewinnt diese Wette?

Aufgabe 182. Zwei Körper A und B bewegen sich von zwei Punkten, deren Entfernung $d = 1200$ m ist, in entgegengesetzter Richtung gleichzeitig aufeinander zu. Wann und wo treffen sich beide Körper, wenn der Körper A die Anfangsgeschwindigkeit $c = 20$ m und pro Sekunde eine gleichförmige Beschleunigung $g = 10$ m hat und wenn der Körper B die Anfangsgeschwindigkeit $c_1 = 90$ m und pro Sekunde eine gleichförmige Verzögerung $g_1 = 8$ m hat?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 34, Seite 78.

Aufgabe 183. Welchen Raum durchfällt ein in einem luftleeren Raum fallender Körper in 35 Sekunden und welches ist der Fallraum in der letzten Sekunde, wenn man weiss, dass nach dem Fallgesetz jeder Körper in der 1. Sekunde 4,905 m und in jeder folgenden Sekunde 9,81 mehr durchfällt als in der nächst vorhergehenden?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 15, Seite 49.

Aufgabe 184. Wieviel Meter durchfällt nach der vorigen Aufgabe 183 ein Körper in $1\frac{1}{2}$ Minuten und wieviel in der 60. Sekunde?

Aufgabe 185. In wieviel Sekunden durchfällt nach der Aufgabe 183 ein Körper einen Raum von 1255,68 m?

Aufgabe 186. Nach welcher Zeit gelangt ein von einem 165 m hohen Turm fallender Stein zur Erde, wenn der Lösung dieser Aufgabe die in der Aufgabe 183 angegebenen Bedingungen zu Grunde gelegt werden und der Widerstand der Luft unberücksichtigt bleibt?

Aufgabe 187. Wie lange und wie hoch würde ein senkrecht in die Höhe geschnellter Körper steigen, der mit einer Geschwindigkeit von 490 m in die Höhe geschnellt wird, wenn man weiss, dass (unberücksichtigt des Widerstandes der Luft) der Körper in jeder Sekunde 9,81 m von seiner Geschwindigkeit verliert?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 19, Seite 54.

Aufgabe 188. Infolge der Anziehungskraft der Erde wird die Bewegung eines senkrecht in die Höhe geschnellten Körpers in derselben Weise verzögert, als die Bewegung eines frei fallenden Körpers (siehe Aufg. 183) beschleunigt wird. Wie hoch steigt hiernach ein mit der Geschwindigkeit von 490 m in die Höhe geschnellter Körper und nach wieviel Sekunden gelangt er wieder zur Erde?

Andeutung.
Man beachte die gelöste Aufgabe 19, Seite 54.

Aufgabe 189. Wie gross war die Geschwindigkeit einer senkrecht in die Höhe geschossenen Kugel, die nach 55 Sekunden wieder zur Erde fiel?

Aufgabe 190. Welchen Weg legte eine mit der Geschwindigkeit von 500 m pro Sekunde senkrecht in die Höhe geschossene Kugel zurück und nach wieviel Sekunden muss sie wieder zur Erde fallen? — Widerstand der Luft bleibt unberücksichtigt. —

Aufgabe 191. Welche Höhe erreichte ein senkrecht in die Höhe geschnellter Körper, der nach 1 Minute wieder zur Erde fiel und welches war die Geschwindigkeit, die der Körper in der 1. Sekunde hatte?

Aufgabe 192. Einen Stein, welchen man in einen Schacht fallen liess, hörte man nach 20 Sekunden auffallen, da man nun weiss, dass der Schall in jeder Sekunde 333 m zurücklegt, so soll aus diesen und nach den in der Aufgabe 183 gemachten Angaben die Tiefe des Schachtes berechnet werden.

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 33, Seite 76.

Aufgabe 193. Die Bewegung einer Kugel, die auf einer schiefen Ebene hinabrollt, ist eine gleichförmig beschleunigte und analog der Bewegung eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers. Legt nämlich eine Kugel, die auf einer schiefen Ebene hinabrollt, in der 1. Se-

Andeutung.
Man beachte die analoge gelöste Aufgabe 15, Seite 49, und siehe das Kapitel der Physik (Mechanik), welches über den freien Fall, bezw. über den Fall auf der schiefen Ebene handelt.

kunde a Meter zurück, so legt sie, wenn der Widerstand der Luft und die Reibung unberücksichtigt bleiben, in der 2. Sekunde $a + 2a = 3a$, in der 3. Sekunde $a + 2.2a = 5a$, in der 4. Sekunde $a + 3.2a = 7a$ u. s. f. Meter zurück. Wenn nun eine einer schiefen Ebene hinabrollenden Kugel in der 1. Sekunde $1^1/_2$ Meter zurücklegt, welchen Weg wird sie demnach in 8 Sekunden zurücklegen und welchen Weg macht sie in der 8. Sekunde?

Aufgabe 194. Welchen Weg muss, nach den in vorstehender Aufgabe 193 gemachten Angaben, eine einer schiefen Ebene hinabrollenden Kugel in der 1. Sekunde gemacht haben, wenn sie in der 12. Sekunde 36 Meter zurücklegt?

Aufgabe 195. Wenn eine Kugel einer schiefen Ebene von 100 m Länge in 11 Sekunden hinabrollt, so soll man nach den in vorstehender Aufgabe 193 gemachten Angaben berechnen, welchen Weg diese Kugel in der 1. Sekunde zurücklegen musste.

Aufgabe 196. Nach den neuesten Untersuchungen über die Eigenwärme der Erde, nimmt die Wärme der Erde um so mehr zu, je mehr man sich ihrem Mittelpunkte nähert und zwar für je 32 m 1° Celsius. Bei welcher Tiefe wird man die Hitze des schmelzenden Gusseisens = 1200° Celsius antreffen, wenn die Temperatur auf der Erdoberfläche 10° Celsius beträgt?

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 21, Seite 59.

Aufgabe 197. In einem Verzeichnis meteorologischer Beobachtungen fand man, dass vom 22. Juni bis 2. Juli eines gewissen Jahres der Thermometer täglich um $\frac{1}{2}$ Grad gestiegen war und dass das arithmetische Mittel aller der an diesen Tagen verzeichneten Thermometerstände $= 22\frac{2}{5}$ Grad betrug. Welche Temperatur zeigte das Thermometer am 1. Juli jenes Jahres?

Andeutung.
Unter dem arithmetischen Mittel mehrerer Zahlen versteht man den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Summe aller dieser Zahlen durch deren Anzahl dividiert.

Ungelöste Aufgaben über die niederen geometrischen Reihen.

Aufgabe 198. Von einer geometrischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 1$, der Quotient $q = 2$ und die Anzahl n der Glieder $= 7$ gegeben. Wie gross ist das letzte Glied und das summatorische Glied dieser Reihe?

Aufgabe 199. Vorstehende Aufgabe 198 für den Fall zu lösen, dass $a = 1$, $q = -2$ und $n = 19$ ist.

Aufgabe 200. Vorstehende Aufgabe 198 für den Fall zu lösen, dass $a = 7$, $q = -3\frac{1}{2}$ und $n = 6$ ist.

Aufgabe 201. Vorstehende Aufgabe 198 für den Fall zu lösen, dass $a = 5\frac{1}{4}$, $q = 0{,}25$ und $n = 6$ ist.

Aufgabe 202. Von einer geometrischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 40$, der Quotient $q = \frac{3}{7}$ und die Anzahl n der Glieder $= \infty$ gegeben. Wie gross ist die Summe aller Glieder und wie gross ist das letzte Glied?

Andeutung. Bei diesen und ähnlichen Aufgaben hat man zu beachten, dass wenn der Quotient q ein echter Bruch und die Anzahl n der Glieder $= \infty$ ist, der Wert für $q^{\infty} = 0$ wird. — Man siehe die Formel 4, Seite 21.

Aufgabe 203. Vorstehende Aufgabe 202 für den Fall zu lösen, dass $a = 1$, $q = \frac{1}{8}$ und $n = \infty$ ist.

Aufgabe 204. Vorstehende Aufgabe 202 für den Fall zu lösen, dass $a = 1$, $q = -\frac{1}{2}$ und $n = \infty$ ist.

Aufgabe 205. Von einer geometrischen Reihe ist das Anfangsglied $a = 1$, der Quotient $q = \frac{3}{2}$ und die Summe s aller Glieder $= 13\frac{3}{6}$ gegeben. Welches ist das letzte Glied und wie gross ist die Anzahl aller Glieder?

Aufgabe 206. Vorstehende Aufgabe 205 für den Fall zu lösen, dass $a = 5314{,}41$, $q = 1\frac{1}{3}$ und $s = 487373{,}25$ ist.

Aufgabe 207. Vorstehende Aufgabe 205 für den Fall zu lösen, dass $a = 40$, $q = \frac{3}{7}$ und $s = 70$ ist.

Aufgabe 208. Von einer geometrischen Reihe ist der Quotient $q = 2$, die Anzahl n der Glieder $= 7$ und die Summe s aller Glieder $= 254$ gegeben. Wie gross ist das Anfangsglied und das letzte Glied der Reihe?

Aufgabe 209. Vorstehende Aufgabe 208 für den Fall zu lösen, dass $q = 1\frac{1}{2}$, $n = 13$ und $s = 396532\frac{3}{4}$ ist.

Aufgabe 210. Von einer geometr. Reihe ist das Anfangsglied $a = \frac{1}{8}$, der Quotient $q = 4$ und das letzte Glied $t = 21845\frac{1}{8}$ gegeben.

Welches ist die Summe und wie gross ist die Anzahl aller Glieder?

Aufgabe 211. Vorstehende Aufgabe 210 für den Fall zu lösen, dass $a = -1$, $q = \frac{1}{3}$ und $t = -\frac{1}{243}$ ist.

Aufgabe 212. Von einer geometr. Reihe ist das Anfangsglied $a = \frac{1}{8}$, die Anzahl n der Glieder = 14 und das letzte Glied $t = 1024$ gegeben. Welches ist die Summe aller Glieder und wie heisst der Quotient der Reihe?

Aufgabe 213. Vorstehende Aufgabe 212 für den Fall zu lösen, dass $a = 9$, $n = \infty$ und und $t = 7$ ist.

Aufgabe 214. Vorstehende Aufgabe 212 für den Fall zu lösen, dass $a = m$, $n = 4$ und $t = m \cdot r^3$ ist.

Aufgabe 215. Von einer geometr. Reihe ist der Quotient $q = \frac{3}{2}$, die Anzahl n der Glieder = 7 und das letzte Glied $t = \frac{1215}{128}$ gegeben. Wie gross ist das Anfangsglied und das summatorische Glied dieser Reihe?

Aufgabe 216. Vorstehende Aufgabe 215 für den Fall zu lösen, dass $q = 2$, $n = 7$ und $t = -192$ ist.

Aufgabe 217. Vorstehende Aufgabe 215 für den Fall zu lösen, dass $q = b^{-\frac{1}{4}}$, $n = 11$ und $t = b^{-2}$ ist.

Aufgabe 218. Von einer geometr. Reihe ist der Quotient $q = \frac{1}{2}$, das letzte Glied $t = \frac{3}{8}$ und die Summe s aller Glieder $= \frac{1533}{8}$. Wie gross ist das Anfangsglied und die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 219. Vorstehende Aufgabe 218 für den Fall zu lösen, dass $q = r$, $t = r^4$ und $s = r(1 + r + r^2 + r^3)$ ist.

Aufgabe 220. Von einer geometr. Reihe ist das Anfangsglied $a = 4$, das letzte Glied $t = 2916$ und die Summe s aller Glieder = 437 gegeben. Welches ist der Quotient und die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 221. Vorstehende Aufgabe 220 für den Fall zu lösen, dass $a = 0{,}4$, $t = 100$ und $s = 149{,}37811$ ist.

Aufgabe 222. Von einer geometr. Reihe ist das Anfangsglied $a = 6$, die Anzahl n der Glieder $= 2$ und die Summe s aller Glieder $= 42$. Welches ist das letzte Glied und der Quotient dieser Reihe?

Andeutung.
Derartige Aufgaben lassen sich nur für $n = 2$ auf elementarem Weg lösen. Man beachte die Anmerkung 3, Seite 30, und die gelöste Aufgabe 6, Seite 30.

Aufgabe 223. Von einer geometr. Reihe ist die Anzahl n der Glieder $= 3$, das letzte Glied $t = 600$ und die Summe s aller Glieder $= 834$. Welches ist der Quotient und das Anfangsglied dieser Reihe?

Andeutung.
Man beachte die Anmerkung 3, Seite 30, und die gelöste Aufgabe 7, Seite 31.

Aufgabe 224. Wieviele Glieder der geometr. Reihe: $1, 3, 9, 27, 81 \ldots\ldots$ muss man addieren, um 3280 als Summe zu erhalten?

Aufgabe 225. Das wievielte Glied der geometrischen Reihe:

$$1, 4, 16, 64, \ldots\ldots$$

ist 4194304 und wie gross ist die Summe der Glieder der Reihe bis dahin?

Aufgabe 226. Das 1. Glied einer geometr. Reihe ist $\sqrt{a}$, das 2. Glied $= 1$; wie gross ist das 20. Glied und welches ist die Summe dieser 20 Glieder?

Aufgabe 227. Wie heisst das 12. Glied der Reihe: $2, 4, 8, 16, \ldots\ldots$ und welches ist die Summe der ersten 30 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 228. Das 1. Glied einer geometr. Reihe ist x^2, das 2. Glied $= x\sqrt{xy}$; welches ist die Summe der ersten 5 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 229. Das 1. Glied einer aus 6 Gliedern bestehenden geometr. Reihe ist $= a^2$, der Quotient der Reihe $= \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; wie heisst die Reihe und welches ist das summatorische Glied derselben?

Aufgabe 230. Das 1. Glied einer geometr. Reihe ist $= 1{,}5$, das 2. Glied $= 0{,}5$; wie gross ist die Summe aller Glieder, wenn deren Anzahl unendlich ist?

Andeutung.
Man beachte, dass der Quotient $= \frac{0{,}5}{1{,}5}$, also ein echter Bruch ist, u. s. f.

Aufgabe 231. Das 1. Glied einer geometr. Reihe ist $= a$, das 2. $= -b$; wie gross ist die Summe aller Glieder, wenn deren Anzahl unendlich und wenn $a > b$ ist?

Aufgabe 232. Das Anfangsglied a einer unendlichen geometr. Reihe sei $= 1$, der Quotient $q = x\sqrt{-1}$. Welches ist das summatorische Glied dieser unendlichen Reihe, wenn x einen echten Bruch darstellt?

Aufgabe 233. In einer geometr. Reihe ist das 1. Glied = 50, das 7. = 31250. Welches ist der Quotient, das 10. Glied und die Summe der ersten 10 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 234. Welches ist das 13. Glied der geometr. Reihe, deren 7. Glied = 1,8236 und deren 8. Glied = 1,149278 ist?

Aufgabe 235. Wenn in einer geometrischen Reihe das 2. Glied = — 9, das 8. Glied = — 6561 ist; wie gross ist alsdann die Summe der ersten 9 Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 236. Das 2. Glied einer geometr. Reihe ist $= \sqrt[3]{a}$, das 7. Glied $= \frac{1}{a}\sqrt{a}$ Welches ist der Quotient und die Summe der ersten 7 Glieder?

Aufgabe 237. Das p^{te} Glied einer geometr. Reihe sei $= a$, das q^{te} Glied $= b$. Wie gross ist das Anfangsglied, das n^{te} Glied und welches ist die Summe vom p^{ten} bis q^{ten} Gliede?

Aufgabe 238. Man soll zwischen 1 und 4 zehn Glieder so einschalten (interpolieren), dass eine geometrische Reihe entsteht; wie heisst dieselbe?

Aufgabe 239. Zwischen a und b sollen 6 Glieder so interpoliert werden, dass eine geometrische Reihe entsteht; wie heisst dieselbe?

Aufgabe 240. Zwischen x^6 und y^6 sollen 5 Glieder so eingeschaltet werden, dass eine geometrische Reihe entsteht; wie heisst dieselbe?

Aufgabe 241. Wie gross ist die Anzahl der Glieder, welche zwischen $\frac{1}{8}$ und 179,2 interpoliert werden können, wenn eine geometrische Reihe entstehen soll, deren Quotient = 2 ist?

Aufgabe 242. Zwischen den Zahlen 2,175 und 285081,66 soll eine gewisse Anzahl Glieder so interpoliert werden, dass eine geometrische Reihe entsteht, deren summatorisches Glied = 570163,32 ist. Wie gross ist die Anzahl jener einzuschaltenden Glieder?

Aufgabe 243. Man interpoliere zwischen zwei aufeinanderfolgenden Glieder a und b einer geometrischen Reihe m andere Glieder so, dass die Reihe eine geometrische bleibt. Wie heisst der Quotient der ursprünglichen Reihe und wie der der neuen Reihe?

Aufgabe 244. Zwischen den Zahlen 2,6839 und 9,3597 sollen 10 Glieder interpoliert werden, dass eine geometrische Reihe entsteht. Wie heisst das 6. Glied dieser Reihe?

Aufgabe 245. Zwischen dem 9. und 10. Gliede der Reihe:

$$4,\ 12,\ 36,\ 108,\ \ldots\ldots$$

sollen 17 Glieder interpoliert werden. Wie heissen die 6 ersten Glieder der dadurch entstehenden Reihe?

Aufgabe 246. Zwischen dem 1. und 2. Gliede der Reihe:

$$\frac{5}{32},\ \frac{5}{2},\ 40,\ \ldots\ldots$$

sollen soviel Glieder interpoliert werden, dass deren Summe $= 2\frac{8}{16}$ beträgt und dass sie mit jenen 2 ersten Gliedern eine geometr. Reihe bilden. Wie gross ist die Anzahl jener Glieder und wie heissen dieselben?

Aufgabe 247. Von einer geometr. Reihe ist das Anfangsglied $= 10{,}25$; ferner sind zwei andere Glieder $= 75{,}2374$ und $227{,}711$ bekannt. Welches ist der Quotient dieser Reihe und die wievielten Glieder der Reihe sind jene zwei gegebenen Glieder, wenn man weiss, dass zwischen denselben 4 andere Glieder liegen?

Aufgabe 248. In einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern beträgt die Summe des 1. und letzten Gliedes $= 4097$ und die Summe der beiden mittleren Glieder $= 272$. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 249. In einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern beträgt die Summe der beiden ersten Glieder $= 1216$ und die Summe der beiden hinteren Glieder $= 17100$. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 250. In einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern ist die Summe der beiden äusseren Glieder $= a$, die Summe der beiden inneren Glieder $= b$. Wie heisst das 1. Glied und der Quotient dieser Reihe?

Aufgabe 251. In einer geometrischen Reihe von 6 Gliedern ist die Summe des 1. und 4. Gliedes um $\frac{91}{128}$ grösser als die Summe aus dem 2. und 5. Gliede, und die Summe der 3. und 6. Glieder ist $= 1\frac{307}{512}$. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 252. Von 3 aufeinanderfolgenden Gliedern einer geometr. Reihe ist das erste $= 8$ und ihre Summe $= 78$. Welches ist der Quotient dieser Reihe?

Aufgabe 253. Wie heisst die 5gliedrige geometrische Reihe, in welcher die Summe des 1., 3. und 5. Gliedes = 63 und die Summe des 2. und 4. Gliedes = 30 beträgt?

Aufgabe 254. In einer geometrischen Reihe von 9 Gliedern beträgt die Summe der 5 ersten Glieder = 121 und die Summe der 5 letzten Glieder = 9801. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 255. In einer geometrischen Reihe von 60 Gliedern beträgt die Summe der ersten 30 Glieder = a, die Summe der letzten 30 Glieder = b. Wie heisst das erste Glied und wie der Quotient dieser Reihe?

Aufgabe 256. Die Summe der ungeraden Glieder einer 5gliederigen geometrischen Reihe ist 63, die Summe der geraden Glieder = 30. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 257. Die Summe der ungeraden Glieder einer 30gliederigen geometr. Reihe ist = a, die Summe der geraden Glieder = b. Wie heisst das Anfangsglied und der Quotient dieser Reihe?

Aufgabe 258. Wenn in einer geometr. Reihe das $(p+q)^{te}$ Glied = S und das $(p-q)^{te}$ Glied = D ist; wie heissen alsdann das p^{te} und das q^{te} Glied?

Aufgabe 259. Der Unterschied der geraden Glieder und der ungeraden Glieder einer geometrischen Reihe von 8 Gliedern ist = 150, die Summe der ganzen Reihe ist = 250. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 260. Der Unterschied der geraden und der ungeraden Glieder einer aus $2n$ Gliedern bestehenden geometr. Reihe ist = d, die Summe sämtlicher Glieder ist = s. Wie heisst das 1. Glied und wie der Quotient dieser Reihe?

Aufgabe 261. Das Anfangsglied einer geometrischen Reihe ist = 0,1; die Summe der 4 ersten Glieder ist um 1 grösser als der Quotient der Reihe. Wie heisst die Reihe?

Aufgabe 262. Die Summe einer aus 3 Gliedern bestehenden geometrischen Reihe ist = a, die Summe der Quadrate der 3 Glieder ist = b. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 263. Die Summe einer aus 4 Gliedern bestehenden geometrischen Reihe ist = a, die Summe der Quadrate der 4 Glieder = b. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 264. Von einer geometrischen Reihe kennt man die Summe aller Glieder $= a$, die Summe der Quadrate aller Glieder $= b$ und die Summe der Kuben aller Glieder $= c$.
Welches ist das Anfangsglied, der Quotient und die Anzahl der Glieder?

Aufgabe 265. Von einer geometrischen Reihe kennt man die Summe aller Glieder $= a$, die Summe der Quadrate aller Glieder $= b$ und die Summe der 4. Potenzen aller Glieder $= c$.
Welches ist das Anfangsglied, der Quotient und die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 266. Von einer geometrischen Reihe kennt man die Summe aller Glieder $= a$, die Summe der Quadrate aller Glieder $= b$ und die Summe der 5. Potenzen aller Glieder $= c$.
Welches ist das Anfangsglied, der Quotient und die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Aufgabe 267. Die Differenz zwischen dem grössten und kleinsten Gliede einer aus 3 Zahlen bestehenden geometr. Reihe ist 48. Ferner verhält sich die Differenz zwischen den Quadraten des grössten und kleinsten Gliedes zur Summe der Quadrate der 3 Glieder wie 208 : 217. Wie heisst diese Reihe?

Aufgabe 268. Die Summe einer aus drei Gliedern bestehenden geometrischen Reihe ist 32,25; das Produkt aus dem mittleren Gliede und der Summe der beiden anderen Glieder beträgt 222,5. Welches ist diese Reihe?

Aufgabe 269. Von einer geometr. Reihe ist das 1. Glied $= a$ und der Quotient $= q$. Wie gross ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe, welche gleich der m-fachen Summe der reziproken Glieder ist.

Aufgabe 270. In einer geometr. Reihe ist das 5. Glied so gross als der Quotient der Reihe; ferner ist die Summe des 2. und 3. Gliedes $= 1\frac{1}{9}$. Wie heissen die 10 ersten Glieder dieser Reihe und welches ist die Summe dieser 10 Glieder?

Aufgabe 271. Man soll drei Zahlen suchen, die so beschaffen sind, dass sie eine geometrische Reihe bilden und dass ihre Summe $= 13$ und dass das Produkt der 1. und 3. Zahl $= 9$ ist. Wie heissen diese Zahlen?

Aufgabe 272. Die Summe dreier Zahlen beträgt 28, welches sind diese Zahlen, wenn dieselben eine geometr. Reihe bilden, in der das Produkt aus dem mittleren Gliede und der Summe der beiden äusseren Glieder $= 160$ ist?

Aufgabe 273. Man soll die Zahl 11310,5 so in 5 Teile zerlegen, dass jeder folgende Teil das 12fache des vorhergehenden Teils ist. Wie heissen diese Teile?

Aufgabe 274. Wie heissen die drei Zahlen, die so beschaffen sind, dass sie eine geometrische Reihe bilden, dass ferner die Differenz der grössten und kleinsten = 15 und dass sich schliesslich die Differenz zwischen den Quadraten der grössten und kleinsten dieser Zahlen zur Summe der Quadrate aller drei Zahlen wie 5 : 7 verhält?

Aufgabe 275. Fünf Zahlen zu suchen, die so beschaffen sind, dass sie eine geometrische Reihe bilden, in welcher die Summe der geraden Glieder = 272 und die Summe der ungeraden Glieder = 1092 ist. Wie heissen diese Zahlen?

Aufgabe 276. Vier Zahlen zu suchen, die so beschaffen sind, dass sie eine geometr. Reihe bilden, in welcher die Summe des 1. und 4. Gliedes sich zur Summe des 2. und 3. Gliedes wie 3 : 2 verhält und in welcher das 2. Glied um 72 kleiner ist als das 4. Glied. Wie heissen diese Zahlen?

Aufgabe 277. Fünf Zahlen zu suchen, die so beschaffen sind, dass sie eine geometrische Reihe bilden und dass die Summe der ersten 4 dieser Zahlen = 15, die Summe der letzten 4 dieser Zahlen aber = 30 ist. Wie heissen dieselben?

Aufgabe 278. Wie gross sind nachstehende Summen:

Andeutung. Analog des 2. Teils der gelösten Aufgabe 47, Seite 165.

a). $6 - 12 + 24 - 48 + 96 - 192 + 384 - 768 + 1536 - \ldots\ldots = ?$

Diese Summe enthält in analoger Weise fortgesetzt 50 Glieder.

b). $x^{10} + x^9y + x^8y^2 + x^7y^3 + x^6y^4 + x^5y^5 + x^4y^6 + x^3y^7 + x^2y^8 + xy^9 + y^{10} = ?$

c). $x^9 - x^8y + x^7y^2 - x^6y^3 + x^5y^4 - x^4y^5 + x^3y^6 - x^2y^7 + xy^8 - y^9 = ?$

d). $x^{30} - x^{29}y + x^{28}y^2 - x^{27}y^3 + \ldots\ldots + y^{30} = ?$

e). $a + \sqrt[5]{a^4b} + \sqrt[5]{a^3b^2} + \sqrt[5]{a^2b^3} + \sqrt[5]{ab^4} + b = ?$

f). $x + \sqrt[7]{x^6y} + \sqrt[7]{x^5y^2} + \sqrt[7]{x^4y^3} + \sqrt[7]{x^3y^4} + \ldots.\, y = ?$

g). $x\sqrt[4]{x^3} - x\sqrt[4]{x}\sqrt{y} + x\sqrt[4]{x}\sqrt{y} - x\sqrt[4]{y^3} + y\sqrt[4]{x^3} - y\sqrt[4]{y}\sqrt{x} + y\sqrt[4]{y}\sqrt{x} - y\sqrt[4]{y^3} = ?$

Aufgabe 279. Wie gross sind nachstehende unendliche Summen:

Andeutung. Analog des 1. Teils der gelösten Aufgabe 47, Seite 165.

a). $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots = ?$

b). $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots = ?$

c). $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{4}{27} + \ldots\ldots = ?$

d). $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots = ?$
wenn $x < 1$ ist.

e). $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots = ?$
wenn $n > 1$ ist.

f). $a^m + a^{-m} + a^{-3m} + a^{-5m} + \ldots = ?$
wenn $a > 1$ ist.

g). $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots = ?$

h). $1 - \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + \ldots = ?$

i). $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}} + \ldots = ?$

k). $\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^5 - \left(\frac{a}{b}\right)^7 + \left(\frac{a}{b}\right)^9 - \ldots = ?$
wenn $a < b$ ist.

l). $m - n + \frac{n^2}{m} - \frac{n^3}{m^2} + \ldots\ldots = ?$
wenn $n < m$ ist.

Aufgabe 280. Wie gross sind nachstehende unendliche Summen:

a). $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{16} + \ldots = ?$

b). $-2 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} - \frac{32}{81} - \frac{64}{242} + \ldots = ?$

c). $x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \ldots = ?$
wenn $x <$ ist.

d). $a + 5a^2 + a^3 + 5a^4 + a^5 + 5a^6 + \ldots = ?$

e). $a + 3a^2 + 2a^3 + a^4 + 3a^5 + 2a^6 + a^7 + 3a^8 + \ldots = ?$
wenn $a <$ ist.

f). $a + 3a^2 + 3a^3 + a^4 + 3a^5 + 3a^6 + a^7 + 3a^8 + 3a^9 + a^{10} = ?$

g). $a + bx + ax^2 + bx^3 + ax^4 + bx^5 + \ldots = ?$

Andeutung zu a).
Man beachte, dass die ungeraden Glieder dieser Summe eine unendliche fallende geometr. Reihe bilden. Dasselbe gilt von den geraden Gliedern der gegebenen Summe. Diese Summe kann man somit in die Summe zweier fallenden unendlichen geometr. Reihen zerlegen und dann die gesuchte Summe bilden, analog der gelösten Aufgabe 43, Seite 107.

Zu e): Diese Summe kann man in 3 unendliche Reihen zerlegen.

Aufgabe 281. Man soll die rein periodischen Dezimalbrüche:

a). 0,5555 .....
b). 0,484848 ...
c). 3,737373 ...
d). 5,317317317 ...
e). 0,142857142857 ...

in gewöhnliche Brüche umwandeln.

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 4, Seite 36.

Aufgabe 282. Man soll die unrein periodischen Dezimalbrüche:

a). 0,4101010 . . .
b). 0,7287878 . . .
c). 0,001111 . . . .
d). 3,012353535 . . .
e). 4,243769769 . . .

in gewöhnliche Brüche umwandeln.

Aufgabe 283. Eine bestimmte Summe soll unter 5 Personen derart verteilt werden, dass die Anteile eine geometrische Reihe bilden, in welcher die Summe des 2. und 3. Gliedes = 8400 Mark, die Summe des 1. und 3. Gliedes = 10000 Mark beträgt. Wieviel erhält jede dieser Personen und welches ist die zu verteilende Summe?

Aufgabe 284. Unter 4 Personen A, B, C und D sollen 700 Mark verteilt werden und zwar so, dass die einzelnen Anteile eine geometrische Reihe bilden und dass sich die Differenz der Anteile von A und D zur Differenz der Anteile von B und C wie 37 : 12 verhält. Wieviel erhält jede der 4 Personen?

Aufgabe 285. Ein Oekonom muss wegen Futtermangels mehrere Male seine anfänglich auf 5103 Schafen bestehende Heerde um $^1/_3$ vermindern, ohne dass er ein Schaf weiter anschafft. Wie oftmal hatte er von seinen Schafen verkaufen müssen, wenn sich schliesslich seine Heerde, ohne dass ihm 1 Schaf gestorben ist, auf 448 Stück reduziert hatte?

Aufgabe 286. Ein Handelsmann bot eine ganz gewöhnliche silberne Uhr nebst einer Stahlkette von 8 Ringen beim Hausieren feil. Er verlangte für Uhr mit Kette bei einer fidelen Tischgesellschaft für den 1. Ring der Kette 1 pf., für den zweiten 3 pf., und so immer für den folgenden Ring 3 mal mehr als für den vorhergehenden. Ein junger Mann, dem dies ein guter Kauf dünkte, schlug ein. Wie theuer kaufte er die Uhr mit Kette?

Aufgabe 287. Ein Bummler ist im Besitze von 252 Mark, er gibt den ersten Tag 4 Mark und jeden folgenden Tag 2 mal mehr aus als an dem nächst vorhergehenden Tage. Nach wieviel Tagen war sein Geld fort?

Aufgabe 288. Wenn ein Mensch 25 Jahre hindurch jedes Jahr durch sein Beispiel oder absichtlich nicht mehr als einen einzigen seiner Mitmenschen von heiligen Pflichten irre führte, und jeder dieser unglückseligen Verführten jährlich wiederum nur einen Einzigen und dieser abermals einen einzigen auf den Abweg zum Unrechte brächte, so beträgt die Anzahl dieser Verführten, die alle jenen ersten gewissenlosen Frevler zum Stammvater ihres Fluches haben, nach 25 Jahren wieviel?

(Einsiedel's speculum pastorum, München 1858. — A. Sammlung von Heis.)

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. }
„ 116. } Rentenrechnung als Fortsetz.
„ 117. } der Zinseszinsrechnung.

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 126. } einer Unbekannten.
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen.

Heft 131. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 132. } einer Unbekannten.
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 140. } einer Unbekannten.
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 144. } einer Unbekannten.
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 148. } einer Unbekannten. Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } Planimetrie: Konstruktionsauf-
„ 154. } gaben, gelöst durch geometr.
„ 155. } Analysis. (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } Planimetrie: Konstruktionsauf-
„ 157. } gaben, gelöst durch algebr. Analysis. (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } Differentialrechnung. (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten implizieter Funktionen.

u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

116. Heft

Preis des Heftes 25 Pf.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Forts. von Heft 115. Seite 161—176.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 115. — Seite 161—176.

Inhalt:

Schluss der ungelösten Aufgaben über die niederen geometrischen Reihen. — Gelöste und ungelöste Aufgaben über die Zusammenstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe. — Aufgaben über die zusammengesetzten Reihen nebst Entwicklung der diesbezüglichen Formeln.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3–4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.



Das vorläufige Inhaltsverzeichnis der Hefte 101—160 befindet sich a[uf] der Rückseite.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung **der wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur **Ausgabe**.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** **Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dme **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 289. Ein scherzhafter Mensch sah in dem Hofe eines Freundes einen Haufen Holzscheite liegen, er erbot sich seinem Freunde das Holz klein zu machen, wenn er ihm für das erste Holzscheit 1 pf., für das zweite 2 pf., für das dritte 4 pf. und so immer doppelt soviel als für das vorhergehende geben wollte. Welche Summe hätte ihm sein Freund bezahlen müssen, wenn der Haufen Holzscheite aus 32 Stück bestand?

Aufgabe 290. In einem Dorfe waren bei einer grossen Feuersbrunst 28 Häuser abgebrannt, darunter 9 Scheunen und die übrigen Wohnhäuser. Ein spekulativer Unternehmer erbot sich sämtliche Häuser wieder aufzubauen, wenn man ihm für die 1. Scheune 1 Mark, für jede folgende das doppelte geben wolle, und wenn man ihm für das 1. Wohnhaus 10 pf., für jedes folgende aber ebenfalls das doppelte geben wollte. Wieviel würden die Scheunen, wieviel die Wohnhäuser und wieviel würde durchschnittlich je eine Scheune und je ein Wohnhaus aufzubauen hiernach kosten?

Aufgabe 291. Ein Landmann säet einen Neu-Scheffel Weizen aus und benutzt die Ernte zur Aussaat für das nächste Jahr, die Ernte des 2. Jahres zur Aussaat für das 3. Jahr u. s. f. Wievielmal hat sich im Durchschnitt ein Saatkorn vermehrt, wenn der Landmann bei der 10. Ernte 1048576 Neu-Scheffel Weizen erntete?

Aufgabe 292. Ein Farmer säet 12 Hektoliter Roggen und erntet hierfür 120 Hektoliter Roggen. Er will nun seine Ernte so oft zur Aussaat verwenden, bis sein Ernteertrag mindestens 3600 Hektoliter erreicht. In wieviel Jahren wird dies geschehen?

Aufgabe 293. Jemand erhält 10 Kartoffeln von einer besonderen amerikanischen Art, der sogenannten schwarzen Kartoffel. Er steckt die 10 Kartoffeln, benutzt den ganzen Ertrag, um sie das nächste Frühjahr wieder zu stecken, und fährt auf diese Weise mehrere Jahre fort. Wenn er nun mindestens 50000 Kartoffeln in einem Herbst ernten will, bevor er einen anderen Verbrauch von denselben macht, wie lange muss er alsdann diese Kartoffelzüchterei treiben, wenn jede gesetzte Kartoffel dieser Art durchschnittlich ein Ernteertrag von 5 Kartoffeln ergibt.

Aufgabe 294. Ein Unternehmer verlangte für das Ausgraben eines Brunnens folgende Preise: für den 1. Meter 5 pf. und für jeden folgenden Meter 3 mal so viel als für den nächst vorhergehenden Meter, für die ganze Arbeit aber 1476,20 Mark. Welche Tiefe des Brunnens hatte der Unternehmer hiernach in Anschlag gebracht?

Aufgabe 295. In eine Lotterie setzt Jemand 10 pf.; da er das erstemal nicht gewinnt, setzt er das zweitemal 20 pf., das drittemal 40 pf. u. s. f. Welches wird sein Einsatz bei fortgesetztem Verluste im 15. Spiel sein und welche Summe muss er bei diesem Spiel gewinnen, wenn er seine sämtlichen Einsätze mit diesem einzigen Spiele zurückerhalten will?

Aufgabe 296. Bei einem Hazardspiele setzt ein Spieler zum 1. Male 20 pf., er verliert und nimmt sich vor, so lange sein Einsatz zu vervierfachen, bis ihm das Glück günstig werde. Nach 10 Spielen, welche er nacheinander verliert, muss er aufhören, da er nur noch im Besitze von 50 pf. ist. Welches war sein Einsatz beim 10. Spiele und welche Summe hatte der Spieler bei sich?

Aufgabe 297. Bei einem Spiele gewinnt Jemand 50 pf., er spielt fort, und gewinnt bei jedem Spiele immer gleich vielmal mehr als beim nächst vorhergehenden. Beim letzten Spiele gewinnt er 512 Mark. Wieviel glückliche Spiele machte der Spieler hintereinander, wenn er im ganzen die Summe von 1023 Mark 50 pf. gewann?

Aufgabe 298. Ein routinierter Spieler beschloss bei einem Hazardspiele, nach jedem Verluste seinen nächsten Einsatz um die Hälfte des vorhergehenden Einsatzes zu erhöhen und zwar so lange bis er gewinnt. Er setzt 50 pf. und verliert 17 Spiele hintereinander, gewinnt aber das 18. Spiel. Welches war sein Einsatz beim letzten Spiele und wieviel beträgt sein Gewinn, wenn der Einsatz dreifach zurückgezahlt wird und wenn während des ganzen Spieles halbe Pfennige für voll gerechnet werden?

Aufgabe 299. Ein mit Wasser gefülltes Bassin soll in 15 Tagen bis zur Hälfte ausgepumpt werden, und zwar täglich um denselben Bruchteil seines jedesmaligen Inhalts. Welches ist dieser Bruchteil?

Aufgabe 300. Wenn man 1 Liter einer Flüssigkeit zu 5 Liter Wasser und von dieser Mischung wieder 1 Liter zu 5 Liter Wasser giesst und diese Verdünnung 8 mal nacheinander fortsetzt, so soll man den Gehalt von jener Flüssigkeit in der letzten Mischung hiernach berechnen.

Aufgabe 301. Aus einem Fasse, welches 80 Liter Wein enthält, werden 2 Liter herausgenommen und durch Wasser ersetzt. Von der somit erhaltenen Mischung werden wieder 2 Liter herausgenommen und durch Wasser ersetzt. Dieses Verfahren wird 10 mal hintereinander wiederholt; wieviel Wein bleibt schliesslich noch in dem Fasse?

Aufgabe 302. Ein Weinhändler hat ein 100 Liter enthaltendes Fass Wein von welchem der Liter 1 Mark kostet. Durch Mischung mit Wasser will er aus diesem Fass Wein ein Fass Wein herstellen von welchem das Liter 80 pf. kostet. Zu diesem Zwecke zapft er 3 Liter ab und ersetzt dieselbe durch Wasser, von dieser Mischung zapft er wieder 3 Liter ab und ersetzt sie durch Wasser u. s. f. Wie oftmal muss er diese Operation vornehmen, bis 1 Liter der im Fass enthaltenen Mischung (nahezu) den Wert von 80 pf. hat?

Aufgabe 303. In einem Fasse befindet sich 1 Hektoliter 80 prozentiger Weingeist, hiervon wird 1 Liter abgezapft und durch Wasser ersetzt, dann wird abermals 1 Liter abgezapft und durch Wasser ersetzt u. s. f. Wieviel Liter reinen Weingeistes sind noch in dem Fasse enthalten, wenn die angegebene Manipulation 25 mal wiederholt wird?

Aufgabe 304. Mit 1000 gr Silber werden 600 gr Kupfer zusammengeschmolzen. Von der Mischung werden 600 gr weggenommen und durch 600 gr Kupfer ersetzt. Wieviel Silber bleibt schliesslich noch in der Mischung, wenn man dieses Verfahren 20 mal wiederholt.

Aufgabe 305. Ein Tabakhändler hat zweierlei Sorten Tabak; von der einen kostet das kg 2 Mark, von der anderen 80 pf. Aus diesen beiden Sorten will er 10 Mittelsorten durch Mischung beider Sorten herstellen und vermengt zu diesem Zweck 7 Teile der ersten Sorte mit 3 Teilen der schlechtern Sorte, hierauf wieder 7 Teile der somit erhaltenen neuen Sorte mit 3 Teilen jener zweiten Sorte und so fort 10 mal hintereinander. Wie theuer kommt das kg der 10ten durch diese Mischung erhaltenen Sorte?

Aufgabe 306. In einem Fasse befinden sich 2 Hektoliter einer mit Wasser mischbaren Flüssigkeit. Zu dieser Flüssigkeit wird eine gewisse Anzahl Liter Wasser gegossen, mit jener Flüssigkeit vermischt und hierauf ebensoviel Liter dieser Mischung von derselben weggenommen. Wenn man diese Operation 30 mal wiederholt und nach derselben nur noch den 70sten Teil der ursprünglichen Flüssigkeit in dem Fasse hat, wieviel Liter Wasser wurden alsdann jedesmal zugesetzt?

Aufgabe 307. Man soll 200 kg blauer Farbe mit 105 kg gelber Farbe vermischen, alsdann 200 kg der somit erhaltenen Mischung wiederum mit 105 kg gelber Farbe vermischen u. s. f. Wie oftmal muss die Operation vorgenommen werden, wenn man zuletzt (ungefähr) nur den hundertsten Teil an blauer Farbe in der Mischung haben will?

Aufgabe 308. Der Holzbestand eines Forstes vermehrt sich mehrere Jahre hindurch jährlich zu $3\frac{1}{2}$ %. Wieviel cbm Holz wird derselbe nach 15 Jahren enthalten, wenn er jetzt zu 250000 cbm veranschlagt ist?

Aufgabe 309. Um wieviel % müsste ein Forst, dessen Holzbestand = 13000 cbm beträgt jährlich zunehmen, wenn er nach Ablauf von 25 Jahren ein Holzbestand von 25000 cbm haben soll?

Aufgabe 310. Der Holzbestand eines Waldes ist auf 200000 cbm veranschlagt. Wie stark war derselbe vor 12 Jahren, wenn er sich während dieser Zeit jährlich um $2\frac{3}{4}$ % vermehrt hat?

Aufgabe 311. Im Jahre 1871 zählte London 3254260 Seelen. Wieviel Seelen zählte es vor 75 Jahren, wenn man annehmen darf, dass sich die Einwohnerzahl seit dieser Zeit jährlich um $2\frac{1}{2}$ % vermehrt hat?

Aufgabe 312. Die Bevölkerung einer Stadt, welche 32500 Einwohner zählte, hat in 24 Jahren um 33566 Seelen zugenommen. Wieviel beträgt der Zuwachs auf 100 Seelen?

Aufgabe 313. Wenn man annimmt, dass in einem Jagdrevier der Bestand an Hasen 1096 Stück beträgt und dass bei gänzlicher Schonung die vorhandenen Hasen sich jährlich um das 3fache vermehrten; wieviel Hasen würden alsdann vor 6 Jahren dagewesen sein, wenn die Brut der mehr als einjährigen Hasen ausser Acht gelassen werden soll?

Aufgabe 314. Kurz nach der Entdeckung von Madeira soll nach gewissen Angaben ein Paar Kaninchen dahin gebracht worden sein. Die Nachkommenschaft derselben wuchs so sehr an, dass der Kolonie der Untergang gedroht haben soll. Wird nun angenommen, dass dieses Paar Kaninchen im ersten Jahr nur 4 mal je 5 Junge zur Welt brachten und dann zu Grunde ging, dass jedes Paar dieser Jungen im nächsten Jahr abermals 4 mal je 5 Junge zur Welt brachten und dann zu Grunde ging u. s. f.; wieviel Paar Kaninchen sind nach dieser Annahme nach 10 Jahren vorhanden gewesen?

Augabe 315. Ein Kapital K soll in n Jahren bei einfachem Zins von p % so abgetragen werden, dass jährlich dieselbe Summe an Kapital und Zinsen bezahlt wird. Welches muss die jährliche Tilgungssumme sein?

Aufgabe 316. Ein Anlehen soll so in n Jahren getilgt werden, dass am Ende eines jeden

Jahres eine gewisse Summe r sammt dem Jahreszins der ganzen jeweiligen Schuld abbezahlt wird. Wie gross war das Anlehen, wenn p % Zinsen in Anschlag gebracht werden?

Aufgabe 317. A sagt zu B: Wenn ich in der Richtung von M nach N gehe und stündlich 1 km zurücklege, so wirst du, wenn du auch 2 km pro Stunde gehst, mich doch nie einholen können, wenn du mir 1 km Vorsprung gibst.

Andeutung.
Analog der gelösten Aufgabe 18, Seite 52.

Aufgabe 318. In ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie $= g$ und dessen Schenkel $= s$ ist, kann man unzählig viele Kreise einschreiben, von welchen der erste die Grundlinie und die beiden Schenkeln des Dreiecks berührt. Welches ist die Summe der Radien aller dieser Kreise, wie gross ist der Radius des ersten und des zweiten Kreises und welches ist die Summe der Peripherien, welches der Inhalt sämtlicher Kreise?

Aufgabe 319. Trägt man in die Peripherie eines Kreises als Sehnen hintereinander je eine Seite des ihm eingeschriebenen regulären n-Ecks, $2n$-Ecks, $4n$-Ecks und so unendlich fort ein, so ist für dieses Eintragen ein Bogen von wieviel Grad ausreichend?

Wenn man aber dieselben abwechselnd vor- und rückwärts einträgt, so nähert sich der Zickzack welchem Teilpunkte des 1. Bogens? und welchem, wenn abwechselnd eine Seite vorwärts und zwei rückwärts eingetragen werden? (Martus.)

Aufgabe 320. Die Planimetrie lehrt, dass wenn ein System von Kreisen, von denen allemal der nachfolgende den vorhergehenden von aussen berührt, von zwei unter einem Winkel von 60° sich schneidenden Geraden berührt wird, alsdann die Radien der aufeinanderfolgenden Kreise eine geometrische Reihe bilden, deren Quotient $= 3$ ist. (?)

Welches ist der Radius des 7. Kreises, wenn der des 1ten $= 5$ cm misst?

Aufgabe 321. Von einem Punkte, der auf dem Schenkel eines spitzen Winkels α liegt, wird auf den andern Schenkel ein Perpendikel gefällt, und hierauf von dem Fusspunkte dieses Perpendikels auf den ersten Schenkel abermals ein Perpendikel u. s. f. Wie gross ist die Summe der Längen der unendlich vielen Perpendikel, wenn der erste dieser Perpendikel a dm, der zweite Perpendikel b dm misst?

Andeutung.
Die Aufgabe ergibt 2 Lösungen, einmal kann man nämlich die gesuchte Länge in a und α, ein andermal in a und b ausdrücken. — Man siehe die gelöste Aufgabe 14, Seite 47.

Aufgabe 322. Auf dem einen Schenkel eines Winkels α wird eine beliebige Strecke m an einem beliebigen Orte dieses Schenkels aufgetragen, dann diese Strecke auf den anderen

Winkelschenkel (rechtwinklig) projiziert, hierauf diese Projektion auf den ersten Schenkel projiziert u. s. f. Welches ist die Länge der Strecke m samt allen den gedachten unendlich vielen Projektionen?

Aufgabe 323. Drei gerade sich schneidende Linien sind gegeben; die erste und zweite schneiden sich unter dem spitzen Winkel α, die zweite und dritte unter dem spitzen Winkel β, die dritte und erste unter dem spitzen Winkel γ. Man soll nun ein beliebiges Stück von a dm Länge der ersten Geraden auf die zweite projizieren, dann diese Projektion auf die dritte Gerade, diese Projektion auf die erste Gerade u. s. f. stets rechtwinklig projizieren und die Summe der Strecke a und diesen unzählig vielen Projektionen berechnen.

Aufgabe 324. Konstruiert man in ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $= a$ ist, einen Kreis, in diesen Kreis wieder ein gleichseitiges Dreieck, in dieses Dreieck wieder einen Kreis u. s. f. bis in's Unendliche, wie gross ist alsdann

a). die Summe der Radien aller dieser Kreise?
b). „ „ „ Peripherien „ „
c). „ „ „ Inhalte „ „

Aufgabe 325. Konstruiert man über den beiden Seiten eines Dreiecks als Grundlinien zwei Dreiecke, von denen jedes an Inhalt $\frac{1}{8}$ des Inhalts des ersten Dreiecks beträgt; konstruiert man dann über den aussenliegenden Seiten der somit erhaltenen Dreiecke als Grundlinien neue Dreiecke, welche ebenfalls an Inhalt $\frac{1}{8}$ des Inhalts dieser Dreiecke betragen u. s. f., wie gross ist alsdann die Summe der Inhalte aller dieser Dreiecke?

Aufgabe 326. Konstruiert man in einen Kreis, dessen Radius $= r$ ist, ein Quadrat, in das Quadrat einen Kreis, in diesen Kreis ein Quadrat u. s. f. bis in's Unendliche, wie gross ist alsdann die Summe der Inhalte aller Kreise, den gegebenen Kreis nicht mitgerechnet, und wie gross ist die Summe der Inhalte aller der Quadrate?

Aufgabe 327. Konstruiert man mit der Höhe eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= a$ ist, ein anderes gleichseitiges Dreieck, mit dessen Höhe wieder ein anderes gleichseitiges Dreieck u. s. f. bis in's Unendliche, wie gross ist alsdann die Summe der Inhalte aller dieser gleichseitigen Dreiecke?

Aufgabe 328. Man soll den Radius einer Kugel berechnen, welche an Volumen gleich der Summe der Volumen einer unendlichen Anzahl von Kugeln ist, deren Radien eine geo-

metrische Reihe mit dem Anfangsglied r und dem Quotienten $\frac{1}{2}$ bilden.

Aufgabe 329. Bezeichnet man den inneren Rauminhalt des Stiefels einer Luftpumpe, wenn man das Volumen des Kolbens abrechnet, mit a, den Rauminhalt des Recipienten nebst dem Verbindungskanal mit r und die Dichtigkeit der im Recipienten befindlichen Luft mit d, wie gross ist die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach 1, 2, 3, ..., allgemein nach n Kolbenzügen?

Andeutung.

Bezeichnet man die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach dem 1. Kolbenzug mit x_1, so hat man, da sich die im Recipienten befindliche Luft von r Kubikeinheiten vermöge ihrer Expansivkraft auf $r+a$ Kubikeinheiten ausdehnte, und da die Dichtigkeiten der Körper von gleicher Masse sich umgekehrt wie ihre Volumnia verhalten, die Proportion:

$$x_1 : d = r : (r+a), \text{ mithin ist:}$$

$$1). \quad x_1 = \frac{r}{r+a} \cdot d$$

Bezeichnet man ferner die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach dem 2. Kolbenzug mit x_2, so hat man, da sich die im Recipienten befindliche Luft von r Kubikeinheiten auf $(r+a)$ Kubikeinheiten ausdehnt, die Proportion:

$$x_2 : x_1 = r : (r+a), \text{ mithin ist:}$$

$$x_2 = \frac{r}{r+a} \cdot x_1 \text{ oder nach Gleich. 1):}$$

$$x_2 = \frac{r}{r+a} \cdot \frac{r}{r+a} \cdot d \text{ und somit:}$$

$$2). \quad x_2 = \left(\frac{r}{r+a}\right)^2 \cdot d$$

In analoger Weise findet man die Dichtigkeit x_3 nach dem 3. Kolbenzug:

$$3). \quad x_3 = \left(\frac{r}{r+a}\right)^3 \cdot d \text{ u. s. f.}$$

d. h. die Dichtigkeiten der im Recipienten befindlichen Luft bilden in ihrer Aufeinanderfolge nach den einzelnen Kolbenzügen eine geometrische Reihe.

Aufgabe 330. Wie gross ist die Dichtigkeit der Luft in dem Recipienten einer Luftpumpe nach 18 Kolbenzügen, wenn der Recipient mit dem Verbindungskanal 30 cdm und der Stiefel, nach Abzug des Kolbens, 6 cdm enthält und die Dichtigkeit der ursprünglich im Recipienten befindlichen atmosphärischen Luft = 1 gesetzt wird?

Aufgabe 331. Nach wieviel Kolbenzügen wird bei einer Luftpumpe, deren Recipient ein 5 mal so grosses Volumen hat wie der Stiefel (nach Abzug des Kolbens), die Luft bis zu $\frac{1}{10}$ ihrer ursprünglichen Dichtigkeit verdünnt sein?

Aufgabe 332. Weingeist, welcher in einem Liter $\frac{1}{c}$ Liter wasserfreien Weingeistes enthält, wird n mal hintereinander mit einer m-fachen Quantität eines anderen Weingeistes versetzt, welcher in einem Liter $\frac{1}{a}$ Liter wasserfreien Weingeistes enthält. Wieviel absoluter Weingeist ist in einem Liter der zuletzt erhaltenen Mischung enthalten?

Aufgabe 333. Zwei Gefässe, A und B, welche V und V_1 Liter enthalten, sind mit einer Mischung von Wasser und Wein gefüllt, und zwar sind in dem Gefässe A a Liter, in dem Gefässe B b Liter reiner Wein enthalten. Nun wird aus dem Gefässe A 1 Liter aus- und in das Gefäss B geschöpft, gleichzeitig aber auch 1 Liter aus dem Gefäss B aus- und in das Gefäss A geschöpft und zwar so, dass in jedem der Gefässe stets gleichviel an Flüssigkeit enthalten ist. Wieviel Wein befindet sich in jedem der Gefässe, wenn diese Manipulation n mal hintereinander vollzogen wird?

Weitere praktische gelöste und ungelöste Aufgaben über die geometrischen Reihen sind in dem Lehrbuch über die Zinseszins- und Rentenrechnung enthalten.

Aufgaben über die arithmetischen und geometrischen Reihen in gegenseitiger Verbindung.

a). Aufgaben über die Zusammenstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe.

Aufgabe 334. Es bestehen zwei dreigliedrige Reihen, eine arithmetische und eine geometrische. Beide Reihen haben dasselbe Anfangsglied a und stimmen in den 2ten Gliedern überein. Welches sind diese Reihen, wenn man noch weiss, dass das letzte Glied der geometrischen Reihe das m-fache des letzten Gliedes der arithmetischen Reihe ist?

Auflösung. Da von den beiden zu suchenden Reihen die Anfangsglieder $= a$ gegeben sind, so hat man zur Bestimmung der arithmetischen Reihe deren Differenz, und zur Bestimmung der geometrischen Reihe deren Quotienten zu suchen. Bezeichnet man jene Differenz mit x, diesen Quotienten mit y, so sind die gesuchten Reihen:

a). . . $a,\quad a+x,\quad a+2x$

b). . . $a,\quad ay,\quad ay^2$

Zur Bestimmung der Unbekannten x und y bestehen der Aufgabe gemäss die Gleichungen:

1). . . $ay = a+x$

2). . . $ay^2 = m(a+2x)$

Substituiert man den aus Gleich. 1). für x sich ergebenden Wert:

3). . . $x = ay - a$

in Gleichung 2)., so erhält man:

4). . . $ay^2 = m(a+2(ay-a))$

Erkl. 125. Nebenstehende Gleichung:

4). . . $ay^2 = m(a+2(ay-a))$

nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$ay^2 = m(a+2ay-2a)$$
$$ay^2 = ma+2amy-2am$$
$$ay^2 = 2amy-am$$
$$y^2 = 2my-m$$
$$y^2-2my = -m$$
$$y^2-2my+\left(\frac{2m}{2}\right)^2 = -m+\left(\frac{2m}{2}\right)^2$$
$$(y-m)^2 = -m+m^2$$
$$y-m = \pm\sqrt{m^2-m}$$
$$y = m\pm\sqrt{m^2-m}$$

oder:

$$y = m\pm\sqrt{m(m-1)}$$

Erkl. 126. Ist:

$$y = m \pm \sqrt{m(m-1)}$$

so erhält man für:

$$y^2 = m^2 \pm 2m\sqrt{m(m-1)} + m(m-1)$$
$$y^2 = m^2 \pm 2m\sqrt{m(m-1)} + m^2 - m$$
$$y^2 = 2m^2 \pm 2m\sqrt{m(m-1)} - m$$
$$y^2 = m(2(m \pm \sqrt{m(m-1)}) - 1)$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 125 für die Unbekannte y:

5). . $y = m \pm \sqrt{m(m-1)}$

Substituiert man diese Werte in Gleichung 3)., so erhält man für die Unbekannte x:

6). . $x = a(m \pm \sqrt{m(m-1)}) - a$

In Rücksicht der für x und y gefundenen Werte geht die arithmetische Reihe a). über in:

A). . . $a,\quad a(m \pm \sqrt{m(m-1)}),\quad a[2(m \pm \sqrt{m(m-1)}) - 1]$

ferner geht die geometrische Reihe b). über in:

B). . . $a,\quad a(m \pm \sqrt{m(m-1)}),\quad ma[2(m \pm \sqrt{m(m-1)}) - 1]$

(siehe Erkl. 126)

und dies sind die gesuchten Reihen.

Es existieren somit, in Folge der Vorzeichen: $\pm$, 2 Paar Reihen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 335. Es gibt eine aus 8 Gliedern bestehende arithmetische und eine aus 4 Gliedern bestehende geometrische Reihe. Diese beiden Reihen haben gleiche Endglieder und gleiche Anfangsglieder, letztere sind in beiden Reihen $= 1$. Wie heissen diese Reihen, wenn man weiss, dass das summatorische Glied der geometrischen Reihe um 21 grösser ist, als das letzte Glied der arithmetischen Reihe?

Erkl. 127. Nebenstehende Gleichung 1). ergibt sich aus der Aufgabe mit Benutzung der Formeln I und II, indem nach der Aufgabe die letzteren Glieder beider Reihen einander gleich sein sollen.

Erkl. 128. Nebenstehende Gleichung 2). ergibt sich aus der Aufgabe mit Benutzung der Formel III und der bereits aufgestellten Gleichung 1), indem nach der Aufgabe die Summe s der geometrischen Reih um 21 grösser sein soll als das letzte Gliede der arithmetischen, oder was dasselbe ist, als das letzte Glied der geometrischen Reihe.

Erkl. 129. Nebenstehende Gleichung:

4). . . . $\dfrac{y^4-1}{y-1} = y^3 + 21$

löst man nach y am besten, wie folgt auf:

Formeln:

Für eine arithmetische Reihe:

I. . $t = a + (n-1)d$ (siehe Formel 1, S. 4)

Für eine geometrische Reihe:

II. . $t = aq^{n-1}$ (siehe Formel 1, S. 18)

III. . $s = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ (siehe Formel 2, S. 19)

Auflösung. Die gesuchten Reihen kann man hinschreiben, sobald die Differenz der arithmetischen und der Quotient der geometrischen Reihe bekannt ist. Bezeichnet man jene Differenz mit x, diesen Quotienten mit y, so hat man zur Berechnung dieser Grössen x und y der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorsteh. Formeln, die Gleichungen:

1). $1 + (8-1)x = 1 \,.\, y^{4-1}$ (siehe Erkl. 127)

2). $1 \cdot \dfrac{y^4-1}{y-1} - 21 = 1 \,.\, y^{4-1}$ (s. Erkl. 128)

Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch Reduktion die einfacheren Gleichungen:

3). . . . $1 + 7x = y^3$

4). . . . $\dfrac{y^4-1}{y-1} = y^3 + 21$

Wird die in dem Quotienten: $\frac{y^4-1}{y-1}$ angedeutete Partialdivision ausgeführt, siehe Erkl. 130, so geht die Gleichung über in:

$$y^3+y^2+y+1 = y^3+21$$
$$y^2+y = 20$$
$$y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 20+\frac{1}{4}$$
$$y+\frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{80+1}{4}}$$
$$y = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{1}{2}\pm\frac{9}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$y_1 = 4 \text{ und}$$
$$y_2 = -5$$

Erkl. 130. Aus der Lehre von den Potenzen ist der Satz bekannt:

„Die Differenz zweier geraden Potenzen ist stets ohne Rest teilbar durch die Differenz ihrer Basen.“

— Man siehe Dr. Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln, speziell den Abschnitt, welcher über die Division von Potenzen handelt. —

Da nun:

$(y^4-1):(y-1) = (y^4-1^4):(y-1)$ ist,

so muss nach vorstehendem Satze diese Division ohne Rest aufgehen. Man erhält:

$$\begin{array}{l|l} y^4-1 & y-1 \\ \pm y^4 \mp y^3 & y^3+y^2+y+1 \\ \hline \quad y^3-1 & \\ \quad \pm y^3 \mp y^2 & \\ \hline \qquad y^2-1 & \\ \qquad \pm y^2 \mp y & \\ \hline \qquad\quad y-1 & \\ \qquad\quad \pm y \mp 1 & \\ \hline \qquad\quad \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

Nach der Erkl. 129 erhält man aus Gleichung 4). für y die Werte:

a). . . . $y_1 = 4$

b). . . . $y_2 = -5$

Setzt man diese Werte für y in Gleichung 3)., so ist:

$$1+7x_1 = 4^3$$
und
$$1+7x_2 = (-5)^3$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für x die Werte:

c). . . . $x_1 = 9$

d). . . . $x_2 = -18$

Mit Hülfe der für x und y gefundenen Werte erhält man für die gesuchten Reihen, unter der Berücksichtigung, dass die Anfangsglieder beider Reihen $= 1$ sind, entweder die Reihen:

A). $\begin{cases} 1,\ 10,\ 19,\ 28,\ 37,\ 46,\ 55,\ 64 \\ 1,\ 4,\ 16,\ 64 \end{cases}$

oder die Reihen:

B). $\begin{cases} 1,\ -17,\ -35,\ -53,\ -71,\ -89,\ -1 \\ 1,\ -5,\ 25,\ -125 \end{cases}$

Aufgabe 336. Es gibt zwei Reihen, eine arithmetische und eine geometrische. Beide stehen in der Beziehung zu einander, dass das 1. Glied der arithmetischen Reihe um 1 grösser ist als das 1. Glied der geometrischen Reihe, dass ferner das 2. Glied der arithmetischen Reihe auch um 1 grösser ist, als das 2. Glied der geometrischen Reihe, dass schliesslich die 3. Glieder

beider Reihen gleich sind und dass das 4. Glied der geometrischen Reihe um 3 grösser ist, als das 4. Glied der arithmetischen Reihe. Welches sind diese gedachten Reihen?

Auflösung. Bezeichnet man das Anfangsglied der arithmetischen Reihe mit x, die Differenz dieser Reihe mit y; bezeichnet man ferner das Anfangsglied der geometrischen Reihe mit z, den Quotienten dieser Reihe mit u, so sind die gedachten Reihen dargestellt durch:

a). . . $x, \quad x+y, \quad x+2y, \quad x+3y$

b). . . $z, \quad z.u, \quad z.u^2, \quad z.u^3$

Zur Berechnung der 4 Unbekannten x, y, z und u kann man hiernach und gemäss der Aufgabe folgende vier Gleichungen ansetzen:

1). . . $x = z+1$

2). . . $x+y = z.u+1$

3). . . $x+2y = z.u^2$

4). . . $x+3y = z.u^3-3$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich x und y auf folgende Weise:

Setzt man den aus Gleichung 1). für z sich ergebenden Wert:

$$z = x-1$$

in die drei anderen Gleichungen, so restieren die Gleichungen:

4). . . $x+y-1 = (x-1)u$

5). . . $x+2y = (x-1)u^2$

6). . . $x+3y+3 = (x-1)u^3$

Wird nun Gleich. 5). in Gleich. 6)., ebenso Gleich. 4). in Gleich. 5). dividiert, so erhält man die weiteren Gleichungen:

7). . . $\dfrac{x+3y+3}{x+2y} = u$

8). . . $\dfrac{x+2y}{x+y-1} = u$

Aus den Gleichungen 7). und 8). folgt die Gleichung:

9). . . $\dfrac{x+3y+3}{x+2y} = \dfrac{x+2y}{x+y-1}$

oder die einfachere Gleichung:

10). . . $y^2-2x = -3$ (siehe Erkl. 131)

Setzt man ferner den sich aus Gleichung 8). für u ergebenden Wert in Gleichung 4)., so ergibt sich:

Erkl. 131. Nebenstehende Gleichung:

9). . . $\dfrac{x+3y+3}{x+2y} = \dfrac{x+2y}{x+y-1}$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$(x+3y+3)(x+y-1) = (x+2y)^2$$

$$x^2+3xy+3x+xy+3y^2+3y-x-3y-3 = x^2+4xy+4y^2$$

$$2x-3 = y^2$$

oder:

$$y^2-2x = -3$$

Erkl. 132. Nebenstehende Gleichung:

11). . . $x+y-1=(x-1)\cdot\frac{x+2y}{x+y-1}$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$(x+y-1)^2=(x-1)(x+2y)$$

$$x^2+2xy+y^2-2x-2y+1=$$
$$x^2-x+2xy-2y$$

oder:

$$y^2-x=-1$$

11). $x+y-1=(x-1)\cdot\frac{x+2y}{x+y-1}$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 132 die einfachere Gleichung:

12). . . $y^2-x=-1$

Aus den Gleichungen 10). und 12). folgt durch die Subtraktion:

$$-2x+x=-3+1$$

oder $-x=-2$

mithin:

c). . . . $x=2$

Setzt man diesen für x gefundenen Wert z. B. in Gleichung 12). ein, so erhält man:

$$y^2-2=-1$$

und hieraus ergibt sich:

$$y^2=+1$$

oder $y=\pm\sqrt{1}$

mithin:

d). . . $\begin{cases} y_1=+1 \\ y_2=-1 \end{cases}$

Aus Gleichung 1). und c). erhält man ferner:

f). . . . $z=1$

Aus den Gleichungen 2)., c)., d). und f). erhält man schliesslich:

g). . . $\begin{cases} u_1=2 \\ u_2=0 \end{cases}$

In Rücksicht der für x, y, z und u gefundenen Werte erhält man somit für die gesuchten Reihen:

A). $\begin{cases} 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots. \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots \end{cases}$

wobei beachtet werden muss, dass die für y_2 und u_2 gefundenen Werte: -1 und 0 nicht berücksichtigt werden können, indem alsdann die Glieder der hierbei entstehenden geometrischen Reihe, ausgenommen dem 1sten Gliede, gleich Null würden.

Aufgabe 337. Addiert man zu den 4 ersten Gliedern einer arithmetischen Reihe, bezw. die Zahlen 5, 6, 9 und 15, so bilden diese 4 hierdurch entstandenen Zahlen eine geometrische Reihe. Welches ist jene arithmetische Reihe?

Auflösung. Bezeichnet man das Anfangsglied der gesuchten arithm. Reihe mit x, deren Differenz mit y, so wird die gedachte Reihe dargestellt durch:

a). $x, \quad x+y, \quad x+2y, \quad x+3y$

Addiert man nunmehr zu den einzelnen Gliedern dieser arithmetischen Reihe bezw. die Zahlen 5, 6, 9 und 15, so erhält man die Reihe:

$x+5, \quad x+y+6, \quad x+2y+9, \quad x+3y+15$

welche eine geometrische Reihe sein soll, was aber nur dann stattfindet, wenn die Quotienten je zweier aufeinanderfolgenden Glieder dieser Reihe konstant, bezw. einander gleich sind. Aus dieser Bedingung ergeben sich für x und y die Bestimmungsgleichungen:

1). $\dfrac{x+y+6}{x+5} = \dfrac{x+2y+9}{x+y+6}$

2). $\dfrac{x+2y+9}{x+y+6} = \dfrac{x+3y+15}{x+2y+9}$

Diese Gleichungen reduziert, ergeben nach den Erklärungen 133 und 134 die einfacheren Gleichungen:

3). . . $y^2+2y = 2x+9$

4). . . $y^2+3y = 3x+9$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich, dass

5). . . . . . $y = x$ sein muss.

Setzt man daher in eine der Gleichungen 3). und 4)., z. B. in Gleich. 3). für $y = x$, so erhält man:

$$x^2+2x = 2x+9$$

und hieraus ergibt sich:

$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$

mithin:

b). . . $\begin{cases} x_1 = +3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Aus den Gleich. 5). und b). folgt, dass:

c). . . $\begin{cases} y_1 = +3 \\ y_2 = -3 \end{cases}$

ist. — Für die gesuchte arithmetische Reihe erhält man somit:

A). . . 3, 6, 9, 12

wobei beachtet werden muss, dass die für x_2 und y_2 gefundenen Werte nicht berücksichtigt werden können, indem dieselben allerdings auch eine arithm. Reihe ergeben, welche aber nicht die Eigenschaft hat, dass wenn man zu den Gliedern derselben bezw. die Zahlen 5, 6, 9 und 15 addiert, eine geometr. Reihe entsteht.

Erkl. 133. Nebenstehende Gleichung:

1). . . $\dfrac{x+y+6}{x+5} = \dfrac{x+2y+9}{x+y+6}$

reduziert, ergibt der Reihe nach:

$$(x+y+6)^2 = (x+2y+9)(x+5)$$
$$x^2+2xy+y^2+12x+12y+36 = x^2+2xy+9x+5x+10y+45$$

oder:

$$y^2+2y = 2x+9$$

Erkl. 134. Nebenstehende Gleichung:

2). . . $\dfrac{x+2y+9}{x+y+6} = \dfrac{x+3y+15}{x+2y+9}$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$(x+2y+9)^2 = (x+3y+15)(x+y+6)$$
$$x^2+4xy+4y^2+18x+36y+81 = x^2+3xy+15x+xy+3y^2+15y+6x+18y+90$$

oder:

$$y^2+3y = 3x+9$$

Aufgabe 338 Wird in einer arithmetischen Reihe, deren Gliederzahl = 3 ist, das 1. Glied um 12 vermehrt, so geht diese Reihe in eine geometrische Reihe über, deren summatorisches Glied = 54 beträgt. Welches sind die beiden gedachten Reihen?

Aufgabe 339. Werden von den ersten vier aufeinanderfolgenden Gliedern einer geometrischen Reihe bezw. die Zahlen 3, 4, $5\frac{1}{2}$ und 8 subtrahiert, so erhält man eine aus 4 Gliedern bestehende neue Reihe, welche eine arithmetische ist. Wie heisst diese Reihe und welches ist jene geometrische Reihe?

Aufgabe 340. Die Summe der ersten 9 Glieder einer arithmetischen Reihe beträgt 36. Das 1. Glied dieser Reihe ist gleich dem Quotienten einer geometrischen Reihe, deren 1. Glied gleich der Differenz jener arithmetischen Reihe ist und von welcher die Summe der beiden ersten Glieder = $1\frac{1}{2}$ beträgt. Wie heisst jene arithmetische und diese geometrische Reihe?

Aufgabe 341. Es gibt fünf Zahlen; schreibt man dieselben in einer gewissen Reihenfolge, so bilden die 3 ersten eine geometrische, die 4 letzten eine arithmetische Reihe. Die Summe der 4 letzten Zahlen beträgt 6 und das Produkt gebildet aus der 2. und 5. Zahl = — 18. Welches sind jene fünf Zahlen?

Aufgabe 342. Es gibt zwei Reihen, eine arithmetische und eine geometrische, welche in folgender Beziehung zu einander stehen. Das 1. Glied der arithm. Reihe ist um 1 grösser als das 1. Glied der geometr. Reihe, dann ist das 3. Glied der geometr. Reihe um 1 grösser als das 3. Glied der arithm. Reihe; ferner ist die Differenz der arithm. Reihe gleich dem Quotienten der geometr. Reihe und schliesslich ist die Summe der 3 ersten Glieder der arithm. Reihe um 1 grösser als die Summe der 3 ersten Glieder der geometr. Reihe. Welches sind diese Reihen?

Aufgabe 343. Man soll drei geometrische Reihen suchen, welche in folgender Beziehung zu einander stehen: 1). die Anfangsglieder der drei Reihen sollen wiederum eine geometrische Reihe bilden, deren Quotient = 3 ist; 2). die Quotienten der drei Reihen sollen in ihrer Aufeinanderfolge eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz = 1 ist; 3). die Summe der 2. Glieder der drei Reihen soll 94 betragen und 4). die Summe der 3 ersten Glieder der 1. Reihe soll = 14 sein. Welches sind diese drei Reihen?

b). Aufgaben über zusammengesetzte Reihen.

Erklärung 135. **Definition einer zusammengesetzten Reihe:** „Unter einer zusammengesetzten Reihe versteht man eine solche, die durch gliedweise Multiplikation einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe entstanden ist.“

Wird eine arithmetische Reihe allgemein dargestellt durch:

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d, \ldots\ldots a+(n-1)d$$

und wird eine geometrische Reihe allgemein dargestellt durch:

$$A,\quad Aq,\quad Aq^2,\quad Aq^3, \ldots\ldots\ldots Aq^{n-1}$$

so erhält man durch gliedweise Multiplikation dieser beiden Reihen:

$$Aa,\quad Aq(a+d),\quad Aq^2(a+2d),\quad Aq^3(a+3d), \ldots\ldots Aq^{n-1}[a+(n-1)d]$$

als **allgemeine Form** einer zusammengesetzten Reihe.

Erklärung 136. Aus der in der Erkl. 135 vorgeführten allgemeinen Form einer zusammengesetzten Reihe ergibt sich, dass das letzte Glied T, bezw. das n^{te} Glied, das allgemeine Glied einer zusammengesetzten Reihe, bestimmt wird durch die Formel:

Formel 1: $T = Aq^{n-1}[a+(n-1)d]$

Erklärung 137. Zwischen dem summatorischen Gliede S einer zusammengesetzten Reihe und den Bestimmungsstücken A, a, d, q und n besteht die Formel:

Formel 2: $S = Aa\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{Ad}{q-1}\left[q^n(n-1)-q\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right]$

(Man siehe auch die Erkl. 138.)

Diese Formel kann man unter anderem, wie folgt herleiten:

Benutzt man die in der Erkl. 135 angeführte Darstellungsweise einer zusammengesetzten Reihe in ihrer allgemeinen Form, so hat man:

$$S = Aa+Aq(a+d)+Aq^2(a+2d)+Aq^3(a+3d)+\ldots\ldots Aq^{n-1}[a+(n-1)d]$$

Zur Bildung der Summe S zerlege man die einzelnen Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung und bilde folgendes Schema:

Schema.

$$\begin{array}{lllll} Aa & = Aa & & & \\ Aq(a+d) & = Aaq & + Adq & & \\ Aq^2(a+2d) & = Aaq^2 & + Adq^2 & + Adq^2 & \\ Aq^3(a+3d) & = Aaq^3 & + Adq^3 & + Adq^3 & + Adq^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Aq^{n-1}[a+(n-1)d] & = Aaq^{n-1} & + Adq^{n-1} & + Adq^{n-1} & + Adq^{n-1} + \ldots Adq^{n-1} \end{array}$$

Aus vorstehendem **Schema ersieht man, dass** die aufeinanderfolgenden **Produkte, welche in** irgend einer der **Vertikalreihen rechts unter**einanderstehen, eine **geometrische Reihe bilden.**

Bezeichnet man **die Summe der geometri**schen Reihe, welche **die 1. Vertikalreihe bil**det, mit s_1, die **Summen der geometrischen** Reihen, welche die **2., 3., ... n^{te} Vertikal**reihe bilden, bezw. **mit s_2, s_3, ... s_n, so ist:**

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots s_n$$

Da man nun nach **der Formel:**

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ **(siehe Formel 2, Seite 19)**

für die einzelnen **Summen s_1, s_2, s_3, ... s_n** die Werte:

$$s_1 = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad s_2 = Adq \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}; \quad s_3 = Adq^2 \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q - 1};$$

$$s_4 = Adq^3 \cdot \frac{q^{n-3} - 1}{q - 1}; \ldots\ldots s_n = Adq^{n-1} \text{ oder auch } = Adq^{n-1} \cdot \frac{q - 1}{q - 1}$$

erhält, so ist:

$$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + Adq \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + Adq^2 \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q - 1} + Adq^3 \cdot \frac{q^{n-3} - 1}{q - 1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots Adq^{n-1} \cdot \frac{q - 1}{q - 1}$$

Scheidet man aus den $(n-1)$ letzten Gliedern den gemeinschaftlichen Faktor: $\frac{Ad}{q-1}$ aus, so erhält man:

$$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{Ad}{q - 1}\left[q(q^{n-1} - 1) + q^2(q^{n-2} - 1) + q^3(q^{n-3} - 1) + \ldots q^{n-1}(q-1)\right]$$

oder:

$$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{Ad}{q - 1}\left[q^n - q + q^n - q^2 + q^n - q^3 + \ldots\ldots + q^n - q^{n-1}\right]$$

$$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{Ad}{q - 1}\left[(q^n + q^n + q^n + \ldots\ldots q^n) - (q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots q^{n-1})\right]$$

Da jede der in **den inneren Klammern ste**henden Summen $(n-1)$ **Glieder enthält, so** hat man schliesslich:

$$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{Ad}{q - 1}\left[q^n(n-1) - (q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots q^{n-1})\right]$$

oder in Rücksicht, **dass die Glieder der in** der 2ten inneren **Klammer stehenden Summe** eine geometrische **Reihe bilden:**

$$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{Ad}{q - 1}\left[q^n(n-1) - q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}\right]$$

was zu beweisen war. **(Man siehe auch die Erkl. 138).**

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } Rentenrechnung als Fortsetz.
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 126. } einer Unbekannten.
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen

Heft 131. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 132. } einer Unbekannten.
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme. Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 140. } einer Unbekannten.
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 144. } einer Unbekannten.
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 148. } einer Unbekannten. Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } Planimetrie: Konstruktionsauf-
„ 154. } gaben, gelöst durch geometr.
„ 155. } Analysis. (Forts. von Heft 2)

Heft 156. } Planimetrie: Konstruktionsauf-
„ 157. } gaben, gelöst durch algebr. Analysis. (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } Differentialrechnung. (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten impliciter Funktionen.

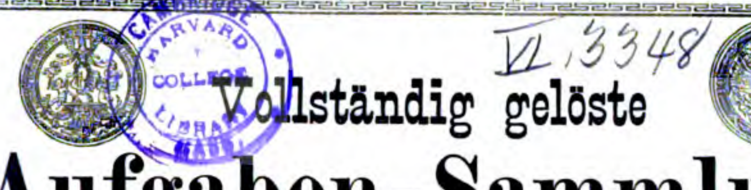
u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

117. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Forts. von Heft 116. Seite 177—192.
Mit 1 Figur.



Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die

arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Fortsetzung von Heft 116. Seite 177—192. Mit 1 Figur.

Inhalt:

Fortsetzung und Schluss der gelösten Aufgaben über die zusammengesetzten Reihen nebst analogen ungelösten Aufgaben. — **Anhang.** — Ueber die harmonischen Reihen. — Gelöste und ungelöste Aufgaben über die harmonischen Reihen.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen **ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und **alsdann auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) **des** Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des **Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als **z.** B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dme **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 344. Welches ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe:

$$a+(a+d)q+(a+2d)q^2+(a+3d)q^3+\ldots?$$

Erkl. 188. Aus nebenstehender Gleich. A). und der in der Erkl. 137 aufgestellten Formel 2 ergibt sich, dass man diese Formel 2 auch in der Form:

$$S=\frac{A}{q-1}\left[\left(a-\frac{dq}{q-1}\right)(q^n-1)+ndq^n\right]$$

schreiben kann.

Formel:

$$S=Aa\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{Ad}{q-1}\left(q^n(n-1)-q\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$ (siehe Erkl. 137)

Auflösung. Die in der Aufgabe gegebene Reihe ist weder eine arithmetische, noch eine geometrische. Vergleicht man diese Reihe mit der in der Erkl. 135 aufgestellten allgemeinen Form einer zusammengesetzten Reihe, so ersieht man, dass sie ebenfalls eine zusammengesetzte Reihe ist, in welcher das in der allgemeinen Form durch A bezeichnete Glied $=1$ ist, indem man sie durch gliedweise Multiplikation der Reihen:

a). $a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\ldots.$

b). $1,\quad q,\quad q^2,\quad q^3\ldots\ldots$

entstanden denken kann.

Die gesuchte Summe S der gegebenen Reihe findet man somit nach vorstehender Formel, wenn man in derselben:

$a=a$, $d=d$ } siehe Reihe a).

$A=1$, $q=q$ } siehe Reihe b).

und $n=n$ setzt.

Man erhält:

1). $$S=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{d}{q-1}\left(q^n(n-1)-q\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

Diesen Ausdruck kann man noch, wie folgt reduzieren:

$$S=\frac{1}{q-1}\left(a(q^n-1)+dq^n(n-1)-dq\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

$$S=\frac{1}{q-1}\left(a(q^n-1)+ndq^n-dq^n-dq\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

$$S=\frac{1}{q-1}\left(a(q^n-1)+ndq^n-dq\left(q^{n-1}+\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)\right)$$

$$S=\frac{1}{q-1}\left(a(q^n-1)+ndq^n-dq\cdot\frac{q^n-q^{n-1}+q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

$$S=\frac{1}{q-1}\left(a(q^n-1)+ndq^n-dq\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

Und hieraus ergibt sich schliesslich:

A). . . $$S=\frac{1}{q-1}\left[\left(a-\frac{dq}{q-1}\right)(q^n-1)+ndq^n\right]$$

als Lösung der Aufgabe (siehe Erkl. 188).

Aufgabe 345. Welches ist die Summe der Reihe:

$$1+2\left(\frac{x}{y}\right)+3\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\left(\frac{x}{y}\right)^3+\ldots\ldots$$

wenn deren Gliederzahl $= n$ ist?

Formel:

$$S=\frac{A}{q-1}\left[\left(a-\frac{dq}{q-1}\right)(q^n-1)+ndq^n\right]$$

(siehe Erkl. 138)

Auflösung. Die in der Aufgabe gegebene Reihe kann man sich durch gliedweise Multiplikation der arithmetischen Reihe:

a). 1, 2, 3, 4, ... n

mit der geometrischen Reihe:

b). 1, $\frac{x}{y}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^2$, $\left(\frac{x}{y}\right)^3$, ...$\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

entstanden denken. Da somit nach der Erkl. 135 die gegebene Reihe eine zusammengesetzte ist, so findet man die gesuchte Summe S dieser Reihe mittelst vorstehender Formel, wenn man berücksichtigt, dass für diesen Fall:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ d &= 1 \end{aligned}\right\} \text{(siehe Reihe a).}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 \\ q &= \frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \text{(siehe Reihe b).}$$

und $n = n$ ist.

Man erhält:

$$S=\frac{1}{\frac{x}{y}-1}\left[\left(1-\frac{1\cdot\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}-1}\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^n-1\right)+n\cdot1\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^n\right]$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion für die gesuchte Summe S:

$$S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^ny+y^{n+1}}{y^{n-1}(x-y)^2}$$

(siehe Erkl. 139)

Erkl. 139. Nebenstehende Gleichung:

$$S=\frac{1}{\frac{x}{y}-1}\left[\left(1-\frac{1\cdot\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}-1}\right)\cdot\left(\left(\frac{x}{y}\right)^n-1\right)+n\cdot1\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^n\right]$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$S=\frac{y}{x-y}\left[\left(1-\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x-y}{y}}\right)\cdot\left(\frac{x^n}{y^n}-1\right)+\frac{nx^n}{y^n}\right]$$

$$S=\frac{y}{x-y}\left[\left(1-\frac{x}{x-y}\right)\cdot\frac{x^n-y^n}{y^n}+\frac{nx^n}{y^n}\right]$$

$$S=\frac{y}{x-y}\left[\frac{x-y-x}{x-y}\cdot\frac{x^n-y^n}{y^n}+\frac{nx^n}{y^n}\right]$$

$$S=\frac{y}{x-y}\left[\frac{-y\cdot(x^n-y^n)}{y^n(x-y)}+\frac{nx^n(x-y)}{y^n(x-y)}\right]$$

$$S=\frac{y}{x-y}\cdot\frac{-x^ny+y^{n+1}+nx^{n+1}-nx^ny}{y^n(x-y)}$$

$$S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^ny+y^{n+1}}{y^{n-1}(x-y)^2}$$

Aufgabe 346. Welches ist die Summe der **unendlichen** Reihe:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{13}{16}+\frac{17}{32}+\ldots\,?$$

Formel:

$$S=\frac{A}{q-1}\left[\left(a-\frac{dq}{q-1}\right)(q^n-1)+ndq^n\right]$$

(siehe Erkl. 138)

Auflösung. Die in der Aufgabe gegebene Reihe kann man sich durch

Erkl. 140. Nach dem algebraischen Satze:
„Ein Produkt wird Null, wenn ein Faktor desselben = Null ist“
weiss man, dass:

$$\infty . 4 . 0 = 0 \text{ ist.}$$

Erkl. 141. Für den Fall, dass q ein echter Bruch und die Anzahl n der Glieder einer zusammengesetzten Reihe $= \infty$ ist, kann man aus der in der Erkl. 138 aufgestellten Formel:

$$S = \frac{A}{q-1}\left[\left(a - \frac{dq}{q-1}\right)(q^n - 1) + ndq^n\right]$$

für diesen Fall eine besondere Formel herleiten, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 5, Seite 21, alsdann

$$q^\infty = 0$$

und dass nach der Erkl. 140

$$\infty \cdot d \cdot q^\infty = \infty \cdot d \cdot 0 = 0 \text{ ist.}$$

Man erhält:

$$S = \frac{A}{q-1}\left[\left(a - \frac{dq}{q-1}\right)(0-1) + 0\right]$$

oder:

$$S = \frac{A}{q-1}\left(-a + \frac{dq}{q-1}\right)$$

Die für den gedachten Fall anzuwendende Formel ist somit:

$$S = \frac{A}{q-1}\left(\frac{dq}{q-1} - a\right)$$

gliedweise Multiplikation der arithmetischen Reihe:

a). 1, 5, 9, 13, 17, ...

mit der geometrischen Reihe:

b). $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\ldots$

entstanden denken. Die gegebene Reihe ist somit eine zusammengesetzte (siehe Erkl. 135), deren Summe S nach der vorstehenden Formel gefunden werden kann. Setzt man in vorstehende Formel für diesen Fall

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ d = 4 \end{array}\right\} \text{(siehe Reihe a).}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{siehe Reihe b).}$$

und $n = \infty$,

so geht dieselbe über in:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\left[\left(1 - \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^\infty - 1\right) + \infty \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right]$$

und hieraus erhält man unter der Berücksichtigung, dass $\frac{1}{2}$ (ein echter Bruch) in der Potenz $\infty = 0$ wird (siehe Erkl. 5, Seite 21), zunächst:

$$S = \frac{1}{1-2}\left[\left(1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (0-1) + \infty \cdot 4 \cdot 0\right]$$

Ferner erhält man nach der Erkl. 140:

$$S = \frac{1}{-1}\left((1+4) . -1 + 0\right)$$

mithin ist die gesuchte Summe:

$$S = -1 \cdot 5 \cdot -1 \quad \text{oder:}$$

$$S = 5 \quad \text{(Man beachte auch die Erkl. 141.)}$$

Aufgabe 347. Welches ist die Summe der unendlichen Reihe:

$$-\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}-\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}-\frac{5^2}{2^5}+\cdots\cdots$$

Formel:

$$S=\frac{A}{q-1}\left(\frac{dq}{q-1}-a\right)$$ (siehe Erkl. 141.)

Auflösung. Um zu erkennen, ob die gegebene Reihe eine zusammengesetzte ist, zerlege man die einzelnen Glieder derselben, analog wie in der Erkl. 137 geschehen ist, und bilde folgendes Schema:

Schema.

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$+\frac{2^2}{2^2}=+\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$-\frac{3^2}{2^3}=-\frac{1}{2^3}-3\cdot\frac{1}{2^3}-5\cdot\frac{1}{2^3}$$

$$+\frac{4^2}{2^4}=+\frac{1}{2^4}+3\cdot\frac{1}{2^4}+5\cdot\frac{1}{2^4}+7\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$-\frac{5^2}{2^5}=-\frac{1}{2^5}-3\cdot\frac{1}{2^5}-5\cdot\frac{1}{2^5}-7\cdot\frac{1}{2^5}-9\cdot\frac{1}{2^5}$$

u. s. f., u. s. f.

Aus diesem Schema ersieht man, dass die aufeinanderfolgenden Produkte, welche in irgend einer der Vertikalreihen rechts untereinanderstehen, eine geometrische Reihe bilden.

Bezeichnet man die Summen der geometrischen Reihen, welche die 1te, 2te, 3te ... Vertikalreihe bilden, bezw. mit s_1, s_2, s_3 ..., so ist die gesuchte Summe x der gegebenen Reihe, d. i. die Summe der Summen jener geometrischen Reihen:

1). . $x=s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots$

Da man nun nach der Formel:

$$s=\frac{a}{1-q}=a\cdot\frac{1}{1-q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21)

$$s_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$ (siehe Erkl. 142)

$$s_2=3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2}{3}$$ („ „ 143)

$$s_3=-5\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{2}{3}$$ („ „ 144)

und analog

Erkl. 142. Da in der geometrischen Reihe:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$$

$$a=-\frac{1}{2}$$

$$q=-\frac{1}{2}$$ (ein echter Bruch) und

$n=\infty$ ist,

so erhält man nach der Formel:

$$s=a\cdot\frac{1}{1-q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21)

für die Summe s_1 jener Reihe:

$$s_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$ oder:

$$s_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

Erkl. 143. Da in der geometrischen Reihe:

$$3\cdot\frac{1}{2^2}-3\cdot\frac{1}{2^3}+3\cdot\frac{1}{2^4}-3\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$$

$$a=3\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$q=-\frac{1}{2}$$ (ein echter Bruch) und

$n=\infty$ ist,

so erhält man nach der Formel:

$$s=a\cdot\frac{1}{1-q}$$ und analog wie in der Erkl. 142

für die Summe s_2 dieser Reihe:

$$s_2=3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$s_4 = 7 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{2}{3} \text{ u. s. f. erhält,}$$

so geht vorstehende Gleich. 1). über in:

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{3} - 5 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{2}{3} + 7 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{2}{3}$$

oder in:

$$2).\quad x = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} - 5 \cdot \frac{1}{2^3} + 7 \cdot \frac{1}{2^4} - \ldots\right)$$

Nun erkennt man leicht, dass die in der Klammer stehende unendliche Reihe eine **zusammengesetzte** Reihe ist, indem man sie durch gliedweise Multiplikation der arithmetischen Reihe:

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \ldots\ldots$$

mit der geometrischen Reihe:

$$-\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2^2}, \quad -\frac{1}{2^3}, \quad +\frac{1}{2^4}, \quad -\frac{1}{2^5}, \ldots\ldots$$

entstanden denken kann. Setzt man daher in vorstehender Formel:

$$S = \frac{A}{q-1}\left(\frac{dq}{q-1} - a\right) \text{ (siehe Erkl. 141)}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{1}{2}$$

$$d = 2$$

$$a = 1$$

und substituiert den für S erhaltenen Ausdruck in vorstehende Gleichung 2)., so erhält man:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 1}\left(\frac{2 \cdot -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 1} - 1\right)$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+2} \cdot \left(\frac{2.1}{1+2} - \frac{3}{3}\right)$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right)$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \quad \text{oder:}$$

$$x = -\frac{2}{27}$$

Erkl. 144. Da in der geometrischen Reihe:

$$-5 \cdot \frac{1}{2^3} + 5 \cdot \frac{1}{2^4} - 5\frac{1}{2^5} + 5\frac{1}{2^6} - \ldots\ldots$$

$$a = -5 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$q = -\frac{1}{2} \text{ (ein echter Bruch) und}$$

$$n = \infty \text{ ist,}$$

so erhält man nach der Formel:

$$s = a \cdot \frac{1}{1-q} \text{ und analog wie in der Erkl. 142}$$

für die Summe s_3 dieser Reihe:

$$s_3 = -5 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{2}{3}$$

Aufgabe 348. Man soll aus der Gleichung:

$$\frac{4}{3(1-x)^3} = 1.2.x + 3.4.x^2 + 5.6.x^3 + 7.8x^4 + 9.10x^5 + \ldots\ldots$$

die Grösse x bestimmen.

Erkl. 145. Da in der geometrischen Reihe:

$$1.x + 1.x^2 + 1.x^3 + 1.x^4 + \ldots\ldots$$

$a = x$

$q = x$ (ein echter Bruch) und

$n = \infty$ ist,

so erhält man nach der Formel:

$$s = a \cdot \frac{1}{1-q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21)

für die Summe s_1 jener Reihe:

$$s_1 = x \cdot \frac{1}{1-x}$$

Erkl. 146. Da in der geometrischen Reihe:

$$5.x^2 + 5.x^3 + 5.x^4 + 5.x^5 + \ldots.$$

$a = 5x^2$

$q = x$ (ein echter Bruch) und

$n = \infty$ ist,

so erhält man nach der Formel:

$$s = a \cdot \frac{1}{1-q}$$

für die Summe s_2 jener Reihe:

$$s_2 = 5x^2 \cdot \frac{1}{1-x}$$

Formel:

$$S = \frac{A}{q-1}\left(\frac{dq}{q-1} - a\right)$$ (siehe Erkl. 141)

Auflösung. Die rechte Seite der gegebenen Gleichung stellt eine unendliche Reihe dar, deren Summe gleich dem auf der linken Seite stehenden endlichen Ausdruck sein soll.

Da nun die unendliche Reihe rechts nur dann einen endlichen Wert annehmen kann, wenn x kleiner als 1 ist, so folgt zunächst hieraus, dass der gesuchte Wert für x ein **echter Bruch** sein muss.

Da ferner jedes Glied der unendlichen Reihe rechts den Faktor 2 enthält, so kann man die ganze Gleichung durch 2 kürzen und man erhält:

1). $$\frac{2}{3(1-x)^3} = 1.x + 3.2x^2 + 5.3x^3 + 7.4x^4 + 9.5x^5 + \ldots.$$

Um nun zu erkennen, ob die unendliche Reihe rechts, deren Summe mit y bezeichnet sein soll, vielleicht eine zusammengesetzte ist, da man sofort ersieht, dass sie keine arithmetische und keine geometrische sein kann, zerlege man die einzelnen Glieder derselben, analog wie in der vorhergehenden Aufgabe, und bilde folgendes Schema:

Schema.

$1.x = 1.x$

$3.2x^2 = 1.x^2 + 5.x^2$

$5.3x^3 = 1.x^3 + 5.x^3 + 9.x^3$

$7.4x^4 = 1.x^4 + 5.x^4 + 9.x^4 + 13.x^4$

$9.5x^5 = 1.x^5 + 5.x^5 + 9.x^5 + 13.x^5 + 17.x^5$

u. s. f., u. s. f. bis in's Unendliche.

Aus diesem Schema ersieht man, dass die aufeinanderfolgenden Produkte, welche in irgend einer der Vertikalkolonnen rechts untereinanderstehen, eine geometrische Reihe bilden. Bezeichnet man die Summen der geometrischen Reihen, welche die 1., 2., 3. . . . Vertikalreihe bilden, bezw. mit s_1, s_2, s_3 . . ., so hat man für die Summe y aller dieser Summen:

2). . . . $y = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots.$

Da nun nach der Formel:

$$s = a \cdot \frac{1}{1-q}$$ (siehe Erkl. 4, Seite 21)

$$s_1 = x \cdot \frac{1}{1-x} \quad \text{(siehe Erkl. 145)}$$

$$s_2 = 5x^2 \cdot \frac{1}{1-x} \quad (\;\text{„} \quad \text{„}\; 146)$$

ebenso:

$$s_3 = 9x^3 \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$s_4 = 13x^4 \cdot \frac{1}{1-x} \text{ u. s. f. u. s. f. ist,}$$

so erhält man für die Summe y:

$$y = x \cdot \frac{1}{1-x} + 5x^2 \cdot \frac{1}{1-x} + 9x^3 \cdot \frac{1}{1-x} + 13x^4 \cdot \frac{1}{1-x} + \ldots\ldots$$

oder:

$$3).\quad y = \frac{1}{1-x}\left(x + 5x^2 + 9x^3 + 13x^4 + \ldots\right)$$

Nun erkennt man leicht, dass die in der Klammer stehende unendliche Reihe eine **zusammengesetzte** ist, indem man sie sich durch gliedweise Multiplikation der arithmetischen Reihe:

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \ldots\ldots$$

mit der geometrischen Reihe:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \ldots\ldots$$

entstanden denken kann.

Setzt man daher in vorsteh. Formel:

$$S = \frac{A}{q-1}\left(\frac{dq}{q-1} - a\right) \quad \text{(siehe Erkl. 141)}$$

$$A = x$$
$$q = x$$
$$d = 4$$
$$a = 1$$

und substituiert den für S erhaltenen Ausdruck in Gleich. 3)., und den aus Gleich. 3). für y erhaltenen Wert in Gleich. 1)., so geht dieselbe über in:

$$4).\quad \frac{2}{3(1-x)^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{x-1}\left(\frac{4x}{x-1} - 1\right)$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Erkl. 147 für die gesuchte Grösse x die Werte:

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

Erkl. 147. Nebenstehende Gleichung:

$$4).\quad \frac{2}{3(1-x)^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{x-1}\left(\frac{4x}{x-1} - 1\right)$$

nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{2}{3(1-x)^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{-x}{1-x}\left(\frac{-4x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}\right)$$

$$\frac{2}{3(1-x)^3} = \frac{-x}{(1-x)^2} \cdot \frac{-4x-1+x}{1-x}$$

$$\frac{2}{3(1-x)^3} = \frac{-x}{(1-x)^2} \cdot \frac{-3x-1}{1-x}$$

$$\frac{2}{3(1-x)^3} = \frac{3x^2+x}{(1-x)^3}$$

$$\frac{2}{3} = 3x^2 + x$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{9} + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$$

$$x + \frac{1}{6} = \pm\sqrt{\frac{8}{36} + \frac{1}{36}}$$

$$x = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{9}{36}}$$

$$x = -\frac{1}{6} \pm \frac{3}{6}$$

und hieraus erhält man:

$$x_1 = -\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 349. Welches ist die Summe der Reihe:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots . \; nx^n ?$$

Aufgabe 350. Welches ist die Summe der Reihe:

$$a + (a+b)x + (a+2b)x^2 + (a+3b)x^3 + \ldots . + (a+mb)x^m ?$$

Aufgabe 351. Welches sind die Summen nachstehender unendlichen Reihen:

a). $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots .$

b). $x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots .$

c). $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots .$

d). $3 + 7x + 11x^2 + 15x^3 + \ldots .$

Andeutung.

Die Summierung der gegebenen Reihen ist nur dann möglich, wenn diese Reihen **konvergieren**, d. h. wenn sich die Summe einer solchen Reihe um so mehr einer bestimmten Grenze nähert, je mehr Glieder der betreffenden Reihe zur Summenbildung verwendet werden. Die nebenstehenden Reihen sind **konvergent**, wenn die aufeinanderfolgenden Glieder stetig kleiner werden: dies findet aber statt, sobald x einen echten Bruch vorstellt.

Aufgabe 352. Welches sind die Summen nachstehender unendlichen Reihen:

a). $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \ldots .$

b). $x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \ldots .$

c). $1 + 5x + 12x^2 + 22x^3 + \ldots .$

d). $x + 6x^2 + 18x^3 + 40x^4 + 75x^5 + \ldots .$

e). $1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \ldots .$

Andeutung.

Analog der gelösten Aufgabe 347.

Anhang.

I. Die harmonischen Reihen.

Frage 1. Was versteht man in der Arithmetik unter einer **harmonischen Proportion**?

Antwort. Hat man vier Zahlen, der Reihe nach allgemein bezeichnet durch:

$$a,\ b,\ c,\ d$$

und es verhält sich die Differenz der beiden ersten, zur Differenz der beiden letzten Zahlen, wie die erste Zahl zur letzten, besteht also die Proportion:

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}$$

so sagt man, diese Proportion ist eine **harmonische**, und jene 4 Zahlen stehen in harmonischem Verhältnis.

Frage 2. Was versteht man unter einer **stetigen** harmonischen Proportion?

Antwort. Hat man drei Zahlen, der Reihe nach allgemein bezeichnet durch:

$$a,\ b,\ d$$

und es verhält sich die Differenz der beiden ersten, zur Differenz der beiden letzten Zahlen, wie die erste Zahl zur letzten, besteht also die Proportion:

$$\frac{a-b}{b-d} = \frac{a}{d}$$

so sagt man, diese Proportion ist eine **stetige harmonische** Proportion, und jene 3 Zahlen stehen in stetigem harmonischen Verhältnis.

Frage 3. Was versteht man unter dem **harmonischen Mittel** zweier Zahlen a und d, und welchen Ausdruck erhält man für dasselbe?

Antwort. Unter dem harmonischen Mittel zweier Zahlen a und d versteht man eine dritte Zahl b, welche so zwischen jenen Zahlen liegt, dass sie in ihrer Reihenfolge:

$$a,\ b,\ d$$

eine stetige harmonische Proportion bilden. Nach Antwort der Frage 2 besteht zwischen den drei Zahlen a, b und d, die Relation:

$$\frac{a-b}{b-d} = \frac{a}{d}$$

Diese Proportion nach b aufgelöst, gibt:

$$ad - bd = ab - ad$$
$$ab + bd = ad + ad$$
$$b(a + d) = 2ad$$

und hieraus erhält man für das harmonische Mittel b:

$$b = \frac{2ad}{a + d}$$

Frage 4. Was versteht man in der Geometrie unter einer harmonischen Proportion?

Antwort. Hat man eine Strecke AB, siehe Figur 13, und man bestimmt auf dieser Strecke und in deren Verlängerung zwei Punkte C und D so, dass die sogenannten inneren Abschnitte AC und BC proportional sind den sogenannten äusseren Abschnitten AD und BD (was nach planimetrischen Sätzen möglich ist), so sagt man: die aus diesen 4 Strecken gebildete Proportion:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

ist eine harmonische Proportion, und jene 4 Punkte A, B, C und D sind harmonische Punkte.

Figur 13.

a
b
d
A C B D

Frage 5. Welche Beziehung findet zwischen der in Antwort der Frage 4 gegebenen Definition einer harmonischen Proportion in der Geometrie und der in Antwort der Frage 2 gegebenen Definition einer stetigen harmonischen Proportion in der Arithmetik statt?

Antwort. Bezeichnet man, s. Fig. 13, die Abschnitte DA, DC und DB, bezw. mit a, b und d, so hat man nach der in Antwort der Frage 4 aufgestellten Proportion:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

wenn man in derselben

$$\left.\begin{aligned} AC &= a - b \\ BC &= b - d \\ AD &= a \\ BD &= d \end{aligned}\right\} \text{siehe Figur 13}$$

setzt,

die mit der in Antw. der Frage 2 aufgestellten Proportion identische Proportion:

$$\frac{a - b}{b - d} = \frac{a}{d}$$

und man kann sagen:

Liegen drei Punkte A, B und C auf einer Linie und man bestimmt einen 4. Punkt D, dessen Entfernungen von A, C und B, bezw. mit a, b und d bezeichnet werden, so, dass diese 3 Strecken die stetige harmonische Proportion:

$$\frac{a-b}{b-d} = \frac{a}{d}$$

bilden, dann sind jene 4 Punkte A, B, C und D harmonische Punkte. — Vergl. Antwort der Frage 4.

Frage 6. Was ist eine **harmonische Reihe** oder eine **harmonische Progression?**

Erkl. 148. Mit nebenstehender Definition einer harmonischen Reihe vergleiche man die analoge Definition 3 in Antwort der Frage 6, Seite 3, und die analoge Definition 3 in Antwort der Frage 1, Seite 17, einer arithmetischen, bezw. einer geometrischen Reihe.

Antwort. Jede reihenartige Anordnung fortschreitender Zahlengrössen, bei welchen das Gesetz stattfindet, dass je drei unmittelbar aufeinanderfolgenden Glieder eine s t e t i g e harmonische Proportion (siehe Antwort der Frage 2) bilden, nennt man eine harmonische Reihe oder harmonische Progression (siehe Erkl. 148).

Frage 7. Welches ist die **allgemeine Form** einer harmonischen Reihe?

Erkl. 149. Aus nebenstehender Gleichung 1). erhält man:

$$ac - bc = ab - ac$$
$$ac + ac - bc = ab$$
$$2ac - bc = ab$$
$$c(2a-b) = ab \quad \text{mithin:}$$

a). . . . $c = \frac{ab}{2a-b}$

In analoger Weise erhält man aus nebenstehenden Gleichungen 2). und 3).:

b). . . . $d = \frac{bc}{2b-c}$

c). . . . $f = \frac{cd}{2c-d}$

d). . . . $g = \frac{df}{2d-f}$

Substituiert man nunmehr aus Gleichung a). den Wert für c in Gleichung b)., so erhält man:

$$d = \frac{b \cdot \frac{ab}{2a-b}}{2b - \frac{ab}{2a-b}} = \frac{ab^2}{3ab-2b^2}$$

oder:

Antwort. Bezeichnen der Reihe nach die Buchstaben:

A). . . a, b, c, d, f, g, ...

die aufeinanderfolgenden Glieder einer harmonischen Reihe, so müssen nach vorstehender Antwort zwischen je 3 aufeinanderfolgenden Gliedern die Beziehungen stattfinden:

1). $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$

2). $\frac{b-c}{c-d} = \frac{b}{d}$

3). $\frac{c-d}{d-f} = \frac{c}{f}$

4). $\frac{d-f}{f-g} = \frac{d}{g}$ u. s. f.

Mit Hülfe dieser Beziehungen kann man nun die Glieder vom 3ten ab in die zwei ersten Glieder a und b ausdrücken.

Man erhält nach der Erkl. 149:

$$c = \frac{ab}{2a-b}$$ (siehe Gleich. a). in Erkl. 149)

f). . . . $d = \frac{ab}{3a-2b}$

Substituiert man ferner den Wert für c aus Gleich. a). und den Wert für d aus Gleich. d). in vorstehende Gleich. f)., so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$f = \frac{a^2b^2}{4a^2b-3ab^2} \quad \text{oder:}$$

g). . . . $f = \frac{ab}{4a-3b}$

In analoger Weise erhält man:

h). . . . $g = \frac{ab}{5a-4b}$ u. s. f.

$$d = \frac{ab}{3a-2b} \quad \text{(siehe Gleich. f). in Erkl. 149)}$$

$$f = \frac{ab}{4a-3b} \quad \text{(„ „ g). „ „ „)}$$

$$g = \frac{ab}{5a-4b} \quad \text{(„ „ h). „ „ „)}$$

u. s. f.

Umstehende Reihe A). geht in Rücksicht der für $c, d, f, g, \ldots$ gefundenen Werte über, in:

B). $a,\ b,\ \frac{ab}{2a-b},\ \frac{ab}{3a-2b},\ \frac{ab}{4a-3b},\ \frac{ab}{5a-4b}, \ldots\ldots$

und dies ist die **allgemeine Form** einer harmonischen Reihe, welche aber noch in eine für manche Operationen zweckmässigere Weise umgeformt werden kann.

Setzt man nämlich:

$$a = \frac{ab}{b}$$

$$b = \frac{ab}{b+(a-b)}$$

$$\frac{ab}{2a-b} = \frac{ab}{b+2(a-b)}$$

$$\frac{ab}{3a-2b} = \frac{ab}{b+3(a-b)}$$

u. s. f.

so geht die Reihe b). über in:

C). $\frac{ab}{b},\ \frac{ab}{b+(a-b)},\ \frac{ab}{b+2(a-b)},\ \frac{ab}{b+3(a-b)},\ \frac{ab}{b+4(a-b)}, \ldots\ldots$

Frage 8. Wie heisst das n^{te}, das **allgemeine,** bezw. das **letzte Glied** t einer harmonischen Progression?

Antwort. Ist, siehe Antwort der vorstehenden Frage 7,

$$\frac{ab}{b},\ \frac{ab}{b+(a-b)},\ \frac{ab}{b+2(a-b)},\ \frac{ab}{b+3(a-b)}, \ldots$$

die allgemeine Form einer harmonischen Reihe, so ergibt sich hieraus für das n^{te}, das allgemeine, bezw. das letzte Glied t dieser Reihe die Formel:

Formel I: $t = \frac{ab}{b+(n-1)(a-b)}$

(siehe Erkl. 150.)

Erkl. 150. Für den Fall, dass in nebenstehender Formel I:

$$(n-1)(a-b) = -b$$

wird, so erhält man:

$$t = \frac{ab}{b-b} = \frac{ab}{0} = \infty$$

Frage 9. Welche besondere Eigenschaften hat die allgemeine Form:

$$\frac{ab}{b}, \frac{ab}{b+(a-b)}, \frac{ab}{b+2(a-b)}, \frac{ab}{b+3(a-b)}, \ldots$$

einer harmonischen Reihe und welche Folgerung ergibt sich daraus?

Antwort. Bei näherer Betrachtung der allgemeinen Form:

$$\frac{ab}{b}, \frac{ab}{b+(a-b)}, \frac{ab}{b+2(a-b)}, \frac{ab}{b+3(a-b)}, \ldots$$

einer harmonischen Reihe ersieht man, dass die Zähler der Brüche, aus welchen die Reihe besteht, beliebige aber gleiche Zahlen sind und dass die Nenner dieser Brüche in ihrer Aufeinanderfolge eine **arithmetische Reihe** bilden, deren Anfangsglied $= b$ und deren Differenz $= (a - b)$ ist. Hieraus ergibt sich die Folgerung, dass man die allgemeine Form einer harmonischen Reihe auch wie folgt ausdrücken kann:

$$\text{D)}. \quad . \quad . \quad . \quad \frac{m}{a}, \frac{m}{a+d}, \frac{m}{a+2d}, \frac{m}{a+3d}, \ldots\ldots$$

wobei man unter a, m und d beliebige Zahlen zu verstehen hat.

Frage 10. Wie entsteht eine harmonische Reihe:

Antwort. Nach Antwort der Frage 9 entsteht eine harmonische Reihe, wenn man eine beliebige Zahl m durch die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Reihe:

$$a, (a+d), (a+2d), \ldots.$$

dividiert. Man erhält:

$$\frac{m}{a}, \frac{m}{a+d}, \frac{m}{a+2d}, \frac{m}{a+3d}, \ldots.$$

Frage 11. In welcher Weise kann man aus einer arithmetischen Reihe eine harmonische Reihe herleiten?

Antwort. Dividiert man die Zahl Eins durch die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Reihe:

$$a, (a+d), (a+2d), (a+3d), \ldots.$$

so erhält man:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \ldots.$$

und dies ist nach voriger Antwort eine harmonische Reihe, mithin kann man sagen:

Die reciproken Werte der aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Reihe bilden eine harmonische Reihe

Erkl. 151. Die in nebenstehender Antwort angeführte Reihe:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \ldots\ldots$$

wird oft als allgemeine Form einer harmonischen Reihe angegeben, bezw. zur Definition einer harmonischen Reihe benutzt.

Erkl. 152. Der in nebenstehender Antwort aufgestellte Satz liefert ein leichtes Erken-

nungsmittel, ob eine Reihe eine harmonische ist. Bilden nämlich die reciproken Werte der Glieder jener fraglichen Reihe in ihrer Aufeinanderfolge eine arithmetische Reihe, so ist jene Reihe eine harmonische.

und hieraus ergibt sich, dass man aus einer arithmetischen Reihe eine harmonische Reihe herleiten kann, indem man die Glieder jener arithmetischen Reihe umkehrt. — Man siehe auch die Erkl. 151.

Aufgabe 353. Man gebe mehrere harmonische Reihen an.

Auflösung. Man bilde sich mehrere beliebige arithmetische Reihen und schreibe entweder die reciproken Werte der Glieder dieser Reihen in derselben Reihenfolge nieder, alsdann sind nämlich, nach Antwort der Frage 11, die somit erhaltenen Reihen harmonische Reihen.

Hat man sich z. B. die arithmetischen Reihen:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ldots\ldots$$
$$9,\ 7,\ 5,\ 3,\ldots\ldots$$

gebildet, so erhält man aus diesen die harmonischen Reihen:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{15},\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{9},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ldots\ldots$$

oder: man dividiere die aufeinanderfolgenden Glieder einer jeden dieser arithmetischen Reihen in irgend ein und dieselbe Zahl, alsdann sind nämlich die somit erhaltenen Reihen, nach Antw. der Frage 10, ebenfalls harmonische Reihen.

Hat man sich z. B. die arithmetischen Reihen:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ldots\ldots$$
$$9,\ 7,\ 5,\ 3,\ldots\ldots$$

gebildet und man dividiert die Glieder der ersten Reihe, z. B. in die beliebige Zahl 5, die Glieder der zweiten Reihe z. B. in die beliebige Zahl 6, so erhält man die harmonischen Reihen:

$$\frac{5}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{5}{11},\ \frac{5}{15},\ldots\ldots$$
$$\frac{6}{9},\ \frac{6}{7},\ \frac{6}{5},\ \frac{6}{3},\ldots\ldots$$

für welche man nach gehöriger Reduktion schreiben kann:

$$1\frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{5}{11},\ \frac{1}{3},\ldots\ldots$$
$$\frac{2}{3},\ \frac{6}{7},\ 1\frac{1}{5},\ 2,\ldots\ldots$$

Aufgabe 354. Man soll zwischen den Zahlen 3 und 9 eine Zahl so einschalten, dass eine harmonische Reihe entsteht.

Auflösung. 1). Bezeichnet man die gesuchte Zahl mit x, so hat man, nach der in Antwort der Frage 6 gegebenen Definition, die Gleichung:

$$\frac{3-x}{x-9}=\frac{3}{9}$$

und hieraus erhält man:

$$27-9x=3x-27$$

oder: $$12x=54$$

mithin: $$x=4\frac{1}{2}$$

Die drei Zahlen: 3, $4\frac{1}{2}$, 9 bilden in dieser Aufeinanderfolge eine harmonische Reihe.

Erkl. 153. Nebenstehende arithm. Reihe:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{9}$$

kann man zur Bestimmung der Grösse x auch auf andere Weise schreiben. Bezeichnet man die Differenz der Reihe mit d, so hat man, da die Reihe eine fallende ist:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-d,\ \frac{1}{9}$$

Da nun das 2. Glied $=\frac{1}{3}-d$ ist, so muss das 3. Glied $=\frac{1}{3}-2d$ sein, man hat also die Gleichung:

$$\frac{1}{3}-2d=\frac{1}{9}$$

und hieraus findet man d, bezw. $\frac{1}{3}-d$ oder x.

Diese Art des Ansatzes ist besonders dann zu empfehlen, wenn mehrere Glieder zu interpolieren sind.

2). Man hätte die Aufgabe auch, wie folgt lösen können:

Sollen die 3 Zahlen

$$3,\ x,\ 9$$

eine harmonische Reihe bilden, so müssen ihre reciproken Werte

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{9}$$ (siehe Erkl. 153)

eine arithmetische Reihe bilden (siehe Erkl. 152), mithin muss die Relation bestehen:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{9}$$ (siehe Antwort der Frage 6, Seite 3)

und hieraus erhält man für x:

$$x=4\frac{1}{2},$$ wie vorhin.

Aufgabe 355. Man soll zwischen den Zahlen $2\frac{1}{2}$ und $5\frac{3}{4}$ zwei Zahlen so einschalten, dass eine harmonische Reihe entsteht.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten zwei einzuschaltenden Zahlen mit x und y, so heisst die harmonische Reihe:

$$2\frac{1}{2},\ x,\ y,\ 5\frac{3}{4}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Grössen x und y hat man entweder, nach der in Antwort der Frage 6 gegebenen Definition, die Gleichungen:

Erkl. 154. Nebenstehende Gleichung:

$$\frac{4}{23} = \frac{2}{5} - 3d$$

nach d aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3d = \frac{2}{5} - \frac{4}{23} = \frac{46-20}{115}$$

$$3d = \frac{26}{115}$$

$$d = \frac{26}{345}$$

Erkl. 155. Nebenstehende Gleichung:

$$1). \quad . \quad . \quad \frac{1}{x} = \frac{2}{5} - \frac{26}{345}$$

nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{1}{x} = \frac{138-26}{345} = \frac{112}{345}$$

$$x = \frac{345}{112} \quad \text{mithin:}$$

$$x = 3\frac{9}{112}$$

Erkl. 156. Nebenstehende Gleichung:

$$2). \quad . \quad . \quad \frac{1}{y} = \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{26}{345}$$

nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{1}{y} = \frac{138-52}{345} = \frac{86}{345}$$

$$y = \frac{345}{86} \quad \text{mithin:}$$

$$y = 4\frac{1}{86}$$

$$a). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{2\frac{1}{2} - x}{x - y} = \frac{2\frac{1}{2}}{y}$$

$$b). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{x - y}{y - 5\frac{3}{4}} = \frac{x}{5\frac{3}{4}}$$

oder man hat, da die reciproken Werte:

$$\frac{2}{5}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{4}{23}, \ldots\ldots$$

jener Glieder der harmonischen Reihe eine **arithmetische** Reihe bilden, wenn man nach dem in der Erkl. 153 angeführten Verfahren:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{5} - d$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{5} - 2d \quad \text{und}$$

$$\frac{4}{23} = \frac{2}{5} - 3d \quad \text{setzt,}$$

dann aus letzterer Gleichung den Wert für d berechnet (siehe Erkl. 154), die einfacheren Gleichungen:

$$1). \quad . \quad . \quad \frac{1}{x} = \frac{2}{5} - \frac{26}{345} \quad \text{(siehe Erkl. 154)}$$

$$2). \quad . \quad . \quad \frac{1}{y} = \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{26}{345}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nach den Erkl. 155 und 156 für x und y die Werte:

$$x = 3\frac{9}{112} \quad \text{(siehe Erkl. 155)}$$

$$y = 4\frac{1}{86} \quad (\text{ „ „ } 156)$$

Hiernach ist die gesuchte harmonische Reihe:

$$2\frac{1}{2},\ 3\frac{9}{112},\ 4\frac{1}{86},\ 5\frac{3}{4}$$

Aufgabe 356. Man gebe mehrere harmonische Reihen an.

Aufgabe 357. Man soll untersuchen, ob die Reihe:

$$1\frac{7}{9},\ 2\frac{2}{7},\ 3\frac{1}{5},\ 5\frac{1}{3},\ 16, \ldots\ldots$$

eine harmonische ist.

Aufgabe 358. Man soll zwischen den Zahlen m und n eine andere Zahl einschalten, dass die drei Zahlen eine harmonische Reihe bilden.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } **Rentenrechnung als Fortsetz.**
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 126. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 132. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 140. } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 144. } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 148. } **einer Unbekannten.** Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 154. } **gaben, gelöst durch geometr.**
„ 155. } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 157. } **gaben, gelöst durch algebr.**
} **Analysis.** (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten impliciter Funktionen.

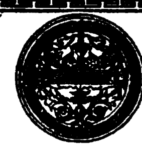
u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

126. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.
Schlussheft.
Forts. von Heft 117. Seite 193—206, Seite I—VI.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Die arithm., geometr. und harmonischen Reihen.

Schlussheft.

Fortsetzung von Heft 117. — Seite 193—206, Seite I—VI.

Inhalt:

Schluss der harmonischen Reihen. — Ueber die Kettenreihen nebst gelösten und ungelösten Aufgaben. — Ueber die Teilbruchreihen nebst gelösten und ungelösten Aufgaben. — Ueber die Bestimmung des allgemeinen Gliedes einiger besonderen Reihen. — Zusammenstellung der entwickelten Formeln. — Berichtigungen. Titelblätter, Vorwort und Inhaltsverzeichnis.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —

Aufgabe 359. Man soll zwischen den Zahlen 1 und 5 zwei Zahlen so interpolieren, dass eine harmonische Reihe entsteht.

Aufgabe 360. Man soll zwischen den Zahlen 1 und 10 drei Zahlen so einschalten, dass eine harmonische Reihe entsteht.

Aufgabe 361. Man soll zwischen den Zahlen m und n drei Zahlen so interpolieren, dass eine harmonische Reihe entsteht.

Aufgabe 362. Zwei Zahlen m und n sind gegeben, man soll 4 weitere Zahlen suchen, welche zwischen jenen Zahlen m und n liegen und mit denselben eine harmonische Progression bilden.

II. Die Kettenreihen.

Frage 1. Was ist eine **Kettenreihe** und welches ist die allgemeine Form einer solchen Reihe?

Antwort. Eine Reihe, welche aus Brüchen besteht, deren Zähler beliebige Zahlen sind und deren Nenner nach ganzen Potenzen einer beliebigen Zahl als Basis fortschreiten, nennt man eine **Kettenreihe**. Hiernach kann man z. B.:

$$\frac{a}{m}, \quad \frac{b}{m^2}, \quad \frac{c}{m^3}, \quad \frac{d}{m^4}, \quad \ldots\ldots$$

als allgemeine Form einer solchen Reihe betrachten.

Frage 2. Wie wird ein Bruch in eine Kettenreihe verwandelt?

Das Verfahren ist der Kürze halber an einem Beispiel zu erläutern.

Antwort. Soll man z. B. den Bruch $\frac{5}{7}$ in eine Kettenreihe verwandeln, so muss man zunächst eine Zahl wählen (wenn solche nicht gegeben ist), welche die Basis der Potenzen bilden soll, aus welchen die Nenner der Glieder bestehen. Angenommen dieselbe sei $= 9$.

Nun setze man:

$$\frac{5}{7} = \frac{5.9}{7.9} = \frac{45}{7.9} = \frac{6+\frac{3}{7}}{9} = \frac{6}{9} + \frac{3}{7.9}$$

Dann setze man:

$$\frac{3}{7.9} = \frac{3.9}{7.9^2} = \frac{27}{7.9^2} = \frac{3+\frac{6}{7}}{9^2} = \frac{3}{9^2} + \frac{6}{7.9^2}$$

Ferner setze man:

$$\frac{6}{7.9^2} = \frac{6.9}{7.9^3} = \frac{54}{7.9^3} = \frac{7+\frac{5}{7}}{9^3} = \frac{7}{9^3} + \frac{5}{7.9^3}$$

u. s. f.

Man erhält hiernach durch Rückwärtseinsetzen:

$$\frac{5}{7} = \frac{6}{9} + \frac{3}{9^2} + \frac{7}{9^3} + \ldots\ldots$$

Frage 3. Was versteht man unter einer **periodischen** Kettenreihe?

Antwort. Unter einer periodischen Kettenreihe versteht man eine solche, in welcher die Zähler der Glieder der Reihe periodisch wiederkehren, so ist z. B. die Kettenreihe:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{7}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \frac{2}{3^5}, \frac{7}{3^6}, \frac{1}{3^7}, \ldots$$

eine periodische Kettenreihe.

Frage 4. Welche wichtige Eigenschaft haben die periodischen Kettenreihen?

Die betreffende Eigenschaft ist an einem Beispiel nachzuweisen.

Antwort. Die periodischen Kettenreihen haben die Eigenschaft, dass man sie in eine geometrische Reihe verwandeln kann. Diese Eigenschaft ist insofern eine wichtige, als man durch sie die Summe der Glieder einer unendlichen periodischen Kettenreihe auf leichte Weise finden kann, was an nachstehendem Beispiel gezeigt werden soll.

Ist z. B. die periodische Kettenreihe:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{7}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \ldots$$

gegeben, so vereinige man je 3 Glieder der Reihe (nämlich stets soviel Glieder als die Periode Glieder enthält), wie folgt:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3}\right) \cdot \frac{1}{3^3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3}\right) \cdot \frac{1}{3^6} + \ldots\ldots$$

Scheidet man nunmehr den gemeinschaftlichen Faktor: $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3}\right)$ aus, so erhält man:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^9} + \ldots\right)$$

Bringt man die Summanden des 1. Faktors auf gleiche Benennung und berücksichtigt, dass die Summanden im 2. Faktor eine **fallende unendliche geometrische** Reihe bilden, deren Anfangsglied $a = 1$, deren Quotient $q = \frac{1}{3^3}$ (ein echter Bruch) und deren Gliederzahl $n = \infty$ ist, so erhält man mit Benutzung der Formel:

$$s = \frac{a}{1-q} \quad \text{(siehe Formel 4, Seite 21)}$$

für die Summe der gegebenen unendlichen periodischen Kettenreihe:

$$\frac{3^2+2.3+7}{3^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{9+6+7}{3^3} \cdot \frac{3^3}{3^3-1} =$$

$$\frac{22}{27-1} = \frac{22}{26} = \frac{11}{13}$$

Erkl. 157. Die Kettenreihen können unter anderem zur Auflösung unbestimmter (diophantischer) Gleichungen vom 1. Grade benutzt werden. Die Methode der Kettenreihen zur Auflösung unbestimmter Gleichungen vom 1. Grade ist jedoch meist so zeitraubend, dass sie keine Anwendung findet, deshalb auch hier nicht erwähnt werden soll. — Man vergl. hierüber das Lehrbuch: „Die unbestimmten Gleichungen."

Aufgabe 363. Man verwandle die Brüche:

$$\frac{2}{5}, \frac{93}{115}, \frac{45}{64}$$

in Kettenreihen und zwar soll dem 1. Bruch die Basis 3, dem 2. Bruch die Basis 4 und dem 3. Bruch die Basis 5 zu Grunde gelegt werden.

Andeutung.
Analog dem gelösten Beispiel in Antwort der Frage 2.

Aufgabe 364. Man suche die Summen folgender unendlichen periodischen Kettenreihen:

Andeutung.
Analog dem gelösten Beispiel in Antwort der Frage 4.

1). $\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{6}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\frac{6}{5^6}+\ldots\ldots$ (Periode der Zähler: 1, 4, 6)

2). $\frac{1}{11}+\frac{8}{11^2}+\frac{5}{11^3}+\frac{7}{11^4}+\frac{1}{11^5}+\ldots\ldots$ („ „ „ 1, 8, 5, 7)

3). $\frac{1}{8}+\frac{2}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{4}{8^4}+\frac{3}{8^5}+\frac{4}{8^6}+\ldots\ldots$ („ „ „ 3, 4)

4). $\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\frac{3}{10^6}+\ldots$ („ „ „ 2, 3, 4)

5). $\frac{a}{m}+\frac{b}{m^2}+\frac{a}{m^3}+\frac{b}{m^4}+\ldots\ldots\ldots$ („ „ „ a, b)

6). $\frac{x}{m}+\frac{y}{m^2}+\frac{z}{m^3}+\frac{x}{m^4}+\ldots\ldots\ldots$ („ „ „ x, y, z)

7). $\left(\frac{x}{m}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{x^3}{m^3}+\ldots\frac{x^n}{m^n}\right)+\left(\frac{x}{m^{n+1}}+\frac{x^2}{m^{n+2}}+\frac{x^3}{m^{n+3}}+\ldots\frac{x^n}{m^{2n}}\right)+$

$\left(\frac{x}{m^{2n+1}}+\frac{x^2}{m^{2n+2}}+\frac{x^3}{m^{2n+3}}+\ldots\frac{x^n}{m^{3n}}\right)+\ldots$ (Periode der Zähler: $x, x^2, \ldots x^n$)

III. Die Teilbruchreihen.

Frage 1. Was versteht man unter einer sogenannten **Teilbruchreihe** (siehe Erkl. 158) und welches ist die allgemeine Form einer solchen?

Antwort. Unter einer Teilbruchreihe versteht man eine Reihe von Stammbrüchen, d. s. Brüche mit den Zählern 1, von welchen jeder folgende ein aliquoter Teil (siehe Erkl. 159) des unmittelbar vorhergehenden ist.

Die **allgemeine Form** einer derartigen Reihe ist nach *Heis:*

$$1). \quad \frac{1}{x}, \; \frac{1}{xy}, \; \frac{1}{xyz}, \; \frac{1}{xyzu}, \ldots\ldots$$

oder wenn man

den Wert des 1. Bruches mit A_1
„ „ „ 2. „ „ A_2
„ „ „ 3. „ „ A_3

u. s. f. bezeichnet:

$$2). \quad \frac{1}{x}, \; \frac{1}{y}A_1, \; \frac{1}{z}A_2, \; \frac{1}{u}A_3, \ldots\ldots$$

Die Glieder einer solchen Reihe heissen **Teilbrüche.**

Erkl. 158. Die Bezeichnung „**Teilbruchreihen**" und die Anwendung derartiger Reihen zur Darstellung gewöhnlicher Brüche, zur Darstellung der Logarithmen, der Quadrat- und Kubikwurzeln etc., wurde zuerst von Dr. **Eduard Heis**, geboren den 18. Februar 1806 zu Köln, eingeführt.

Erkl. 159. Unter einem **aliquoten Teil** (vom lat. *p. aliquota,* irgendwievielter Teil) versteht man einen Teil einer Zahl (Grösse), durch welchen sich dieselbe ohne Rest dividieren lässt.

Frage 2. Welchen Zweck haben nach Dr. *Ed. Heis* die Teilbruchreihen?

Antwort. Die Summe einer Teilbruchreihe, z. B. die Summe:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \ldots\ldots$$

ist gleich einem ganz bestimmten Werte (einem Bruche). Wird nun eine solche Summenreihe an irgend einer Stelle abgebrochen, so bildet die Summe aller vorangehenden Glieder einen sogenannten **Näherungswert** des wahren Wertes jener Summe. Diese Näherungswerte kommen dem wahren Werte um so näher, je mehr Glieder, sogenannte **Partialbrüche**, man hierzu nimmt.

Mit Hülfe dieser Teilbruchreihen kann man somit Näherungswerte von mehrziffrigen Zahlen und Dezimalbrüchen bestimmen, und dies ist der Zweck der Teilbruchreihen; sie haben also denselben Zweck wie die Kettenbrüche (siehe Erkl. 160).

Erkl. 160. Nebenstehende Teilbruchreihe kann man auch durch einen sogenannten **aufsteigenden Kettenbruch** darstellen.

Man kann nämlich:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \ldots\ldots = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cdots}{u}}{z}}{y}}{x}$$

setzen.

Der 1. Näherungswert der Reihe ist $\frac{1}{x}$

„ 1. „ des Kettenbruchs ist auch $\frac{1}{x}$

Der 2. Näherungswert der Reihe ist

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} = \frac{y+1}{xy}$$

Der 2. Näherungswert des Kettenbruchs ist

$$\frac{1 + \frac{1}{y}}{x} = \frac{\frac{y+1}{y}}{x} \text{ auch } = \frac{y+1}{xy} \text{ u. s. f.}$$

Man vergleiche hiermit das Kapitel, welches über die **Kettenbrüche** handelt.

Frage 3. Wann heisst eine Teilbruchreihe **periodisch**?

Antwort. Eine Teilbruchreihe heisst **periodisch**, wenn die sogenannten Partialnenner, d. s. die Nenner der einzelnen Teilbrüche, Perioden enthalten.

Frage 4. Wie wird ein Bruch in eine Teilbruchreihe verwandelt?

Das Verfahren ist der Kürze halber an einem Beispiel zu erläutern.

Antwort. Soll man z. B. den Bruch $\frac{1301}{5720}$ in eine Teilbruchreihe verwandeln, so setze man:

$$1).\quad \frac{1301}{5720} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \ldots.$$

Aus dieser Gleichung müssen nunmehr die Grössen x, y und z bestimmt werden, was wie folgt geschieht.

Die Gleichung 1). mit $5720 . x$ multipliziert, gibt:

$$2).\quad 1301x = 5720 + \frac{5720}{y} + \frac{5720}{yz} + \ldots$$

Da man nun rechts lauter positive Partialbrüche haben will, so muss notwendigerweise die Summe derselben gleich einer positiven Zahl sein, d. h. es muss: $1301x - 5720$ eine positive Zahl ergeben; dies ist aber nur der Fall, wenn

$$1301x > 5720 \text{ ist.}$$

Für x kann man somit eine solche Zahl wählen, dass dies stattfindet; wählt man für x die kleinstmögliche Zahl (siehe Erkl. 161 und 164) welche dieser Bedingung entspricht, setzt man also:

$$a). \quad . \quad . \quad . \quad x = 5$$

so erhält man aus Gleichung 2).:

$$6505 = 5720 + \frac{5720}{y} + \frac{5720}{yz} + \ldots$$

und hieraus ergibt sich:

$$785 = \frac{5720}{y} + \frac{5720}{yz} + \ldots..$$

oder:

$$3).\quad 785y = 5720 + \frac{5720}{z} + \frac{5720}{zu} + \ldots$$

Um rechts lauter positive Partialbrüche zu erhalten, wähle man auch hier, analog wie vorhin, für y die kleinstmögliche Zahl (siehe Erkl.161) so, dass:

$$785y > 5720 \text{ wird.}$$

Erkl. 161. Zur Bestimmung der kleinstmöglichen Zahl für x hat man die Division: $\frac{5720}{1301}$ so auszuführen, dass man zum Quotienten eine Zahl erhält, die um eine Einheit grösser ist, als der Quotient 5720:1301 ganze Einheiten enthält. Man erhält:

$$5720 : 1301 = \underset{(x)}{5} - \frac{785}{1301}$$

Zur Bestimmung der kleinstmöglichen Zahl für y hat man die Division: $\frac{5720}{785}$ in analoger Weise auszuführen.

Man erhält analog wie vorhin:

$$\frac{5720}{785} = \underset{(y)}{8} - \frac{560}{785}$$

Zur Bestimmung der kleinstmöglichen Zahl für z hat man die Division: $\frac{5720}{560}$ auszuführen. Man erhält analog wie vorhin:

$$\frac{5720}{560} = \underset{(z)}{11} - \frac{440}{560} \quad \text{u. s. f.}$$

Diese einzelnen Divisionen kann man zusammenhängend, wie in nachstehendem Schema angedeutet ist, ausführen:

Schema.

$$\begin{array}{lcccc}
5720 : 1301 & = & 5 & = & x \\
\quad 6505 & & & & \\
5720 : 785 \;\ldots & = & 8 & = & y \\
\quad 6280 & & & & \\
5720 : 560 \;\ldots\ldots & = & 11 & = & z \\
\quad 6160 & & & & \\
5720 : 440 \;\ldots\ldots & = & 13 & = & u
\end{array}$$

u. s. f.

wonach sich die Verwandlung eines Bruches in eine Teilbruchreihe auf ziemlich rasche Weise bewerkstelligen lässt.

Erkl. 162. Aus vorstehendem Schema ergibt sich, dass die Werte für x, y, z, ... stetig grösser werden, indem bei den Divisionen, mittelst welchen diese Werte bestimmt werden müssen, die betreffenden Divisoren stetig kleiner werden.

Erkl. 163. Aus vorstehendem Schema ergibt sich ferner, dass die sich ergebende Teilbruchreihe in allen Fällen, in welchen der ursprüngliche Bruch ein endlicher ist, eine begrenzte sein muss, indem die betreffenden Divisoren stetig kleiner werden und sich der Grenze 1 nähern.

Erkl. 164. Es ist nicht gesagt, dass man für die Grössen $x, y, z, \ldots$ die kleinstmöglichen Zahlen wählen muss, welche den in nebenstehender Antwort enthaltenen Ungleichungen:

$$1301x > 5720$$
$$785y > 5720 \quad \text{u. s. f.}$$

genügen müssen. Man kann statt diesen kleinstmöglichen Zahlen auch grössere Zahlen wählen, stets wird man eine andere Teilbruchreihe für ein und denselben gegebenen Bruch erhalten. Am besten wählt man für $x, y, z, \ldots$ solche Zahlen, mit welchen sich leicht dividieren, bezw. multiplizieren lässt.

Setzt man also:

b). . . . . $y = 8$

so erhält man aus Gleichung 3).:

$$6280 = 5720 + \frac{5720}{z} + \frac{5720}{z.u} + \ldots$$

und hieraus ergibt sich:

$$560 = \frac{5720}{z} + \frac{5720}{z.u} + \ldots.$$

oder:

4). $$560z = 5720 + \frac{5720}{u} + \frac{5720}{u.v} + \ldots$$

Auf analoge Weise wie vorhin, setzt man:

c). . . . $z = 11$

Ebenso erhält man:

d). . . . $u = 13$ u. s. f. u. s. f.

Aus den Gleichungen 1)., a)., b)., c). und d). ergibt sich somit die gesuchte Teilbruchreihe:

$$\frac{1301}{5720} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \frac{1}{5.8.11.13} - \ldots$$

Frage 5. Welches sind die Näherungswerte der allgemeinen Teilbruchreihe:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \ldots.$$

Antwort. Aus der allgemeinen Teilbruchreihe:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \ldots.$$

findet man die Näherungswerte auf leichte Weise.

Man hat für den 1. Näherungswert: $\frac{1}{x}$

für den 2. Näherungswert: $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} = \frac{y+1}{xy}$

für den 3. Näherungswert:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} = \frac{yz+z+1}{xyz}$$

für den 4. Näherungswert:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} = \frac{yzu+zu+u+1}{xyzu}$$

u. s. f.

Die gesuchten Näherungswerte sind also der Reihe nach:

$$\frac{1}{x},\ \frac{y+1}{xy},\ \frac{yz+z+1}{xyz},\ \frac{yzu+zu+u+1}{xyzu}, \ldots$$

woraus sich das Bildungsgesetz derselben erkennen lässt.

Man kann die Näherungswerte auch auf einfache Weise, wie folgt darstellen.

Bezeichnet man den 1. Näherungswert $\frac{1}{x}$ mit A_1, so ist dem Bildungsgesetz der Kettenreihe entsprechend der 2. Näherungswert $= \frac{1}{y} A_1$; bezeichnet man diesen zweiten Näherungswert mit A_2, so ist der dritte Näherungswert $=$ $\frac{1}{z} A_2$ u. s. f.

Frage 6. Wie findet man den wahren Wert einer Kettenreihe?

Antwort. Man findet den wahren Wert einer Kettenreihe, indem man den letzten Näherungswert derselben bestimmt.

Frage 7. Wie findet man den wahren Wert einer periodischen Teilbruchreihe?

Das Verfahren ist der Kürze halber an einem Beispiel zu erläutern.

Antwort. Ist z. B. die periodische Teilbruchreihe:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.3} + \frac{1}{3.7.3.7} + \frac{1}{3.7.3.7.3} + \cdots$$

welche in den Partialnennern die Periode 3, 7 enthält, gegeben, so kann man den wahren Wert dieser Reihe, das ist die Summe dieser Reihe, auf folgende zwei Arten finden.

1). Man zerlegt die Reihe in ein Produkt von Faktoren so, dass einer derselben eine fallende unendliche geometrische Reihe bildet.

Scheidet man in vorstehendem Beispiel aus den ungeraden Gliedern der Reihe den Faktor $\frac{1}{3}$ und aus den geraden Gliedern derselben den Faktor $\frac{1}{3.7}$ aus, so erhält man:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.3} + \frac{1}{3.7.3.7} + \frac{1}{3.7.3.7.3} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{(3.7)^2} + \cdots\right) + \frac{1}{3.7}\left(1 + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{(3.7)^2} + \cdots\right)$$

$$\text{oder} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{(3.7)^2} + \cdots\right)$$

und man hat in der 2. Klammer eine fallende unendliche geometrische Reihe, deren Summe mittelst der Formel:

$$s = \frac{a}{1-q}$$ (siehe Formel 4, Seite 21)

gebildet werden kann, wenn man in derselben $a = 1$, $q = \frac{1}{3.7}$ setzt. Man erhält hieraus:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{3.7.3}+\frac{1}{3.7.3.7}+\cdots\cdots=\frac{7+1}{3.7}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3.7}}\right)=\frac{8}{21}\cdot\frac{21}{21-1}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

oder:

2). Man reduziert die gegebene Teilbruchreihe auf eine algebraische Gleichung, indem man sie $= x$ setzt und einen zweiten Wert, welcher ebenfalls $= x$ gesetzt werden kann, ausscheidet.

Setzt man vorstehende beispielsweise gegebene Reihe $= x$ und scheidet in dieser Reihe vom zweiten Gliede ab den Faktor $\frac{1}{3.7}$ aus, so erhält man:

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3.7}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{3.7.3}+\frac{1}{3.7.3.7}+\cdots\right)$$

Nun ist ersichtlich, dass in der Klammer die Summe der Glieder vom 2ten ab die ursprüngliche Reihe wiederum bilden, also auch $= x$ ist, mithin erhält man:

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3.7}(1+x)$$

und hieraus ergibt sich:

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}x$$

$$21x=7+1+x$$

$$20x=8 \quad \text{oder:}$$

$$x=\frac{8}{20}=\frac{2}{5},$$ nämlich dasselbe Resultat wie vorhin.

Aufgabe 365. Man soll den Bruch $\frac{117}{238}$ in eine Teilbruchreihe verwandeln und die Näherungswerte bestimmen.

Andeutung. Analog dem in Antwort der Frage 4 gelösten Beispiel und mit Benutzung der Erkl. 161 und der allgemeinen Näherungswerte in Antwort der Frage 5.

Aufgabe 366. Man soll die Brüche:

$$\frac{73}{119},\ \frac{1}{5},\ 0{,}6723 \text{ und } 0{,}0205$$

in Teilbruchreihen verwandeln und die Näherungswerte derselben bestimmen.

Aufgabe 367. Man soll die Zahl:

$$\pi = 3{,}1415926 \text{ und } \frac{1}{\pi}$$

in Teilbruchreihen verwandeln und einige Näherungswerte angeben.

Aufgabe 368. Man soll die wahren Werte folgender periodischen Teilbruchreihen bestimmen:

1). $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.2}+\frac{1}{2.3.2.3}+\cdots\cdots$

Andeutung. Analog dem in Antwort der Frage 7 nach zwei Methoden gelösten Beispiele. Die Buchstaben $A_1, A_2, A_3\cdots$ bedeuten die vorhergehenden Näherungswerte.

2). $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}A_1+\frac{1}{4}A_2+\frac{1}{5}A_3+\ldots\ldots$

3). $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}A_1+\frac{1}{7}A_2+\frac{1}{3}A_3+\frac{1}{5}A_4+\ldots$

4). $\frac{1}{7}+\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{3}A_2+\frac{1}{2}A_3+\frac{1}{3}A_4+\ldots$

5). $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}A_1+\frac{1}{a}A_2+\frac{1}{b}A_3+\ldots\ldots$

Anmerkung. In Betreff der Teilbruchreihen siehe man auch das Kapitel, welches über die Kettenbrüche handelt.

IV. Entwicklung einiger Quotienten in unendliche Reihen und Bestimmung des allgemeinen Gliedes dieser Reihen.

Aufgabe 369. Man soll den Quotienten $\frac{x}{(1-2x)(1-x)}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln und dann das allgemeine und das 12. Glied dieser Reihe bestimmen.

Erkl. 165. Um den Quotienten $\frac{1}{1-2x}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln, führe man die angedeutete Division aus.

Man erhält:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-2x \\ \hline 1-2x & 1+2x+4x^2+\ldots \\ -\;\;+ & \\ \hline 2x & \\ 2x-4x^2 & \\ -\;\;\;+ & \\ \hline 4x^2 & \\ 4x^2-8x^3 & \\ -\;\;\;+ & \\ \hline \text{u. s. f.} & \end{array}$$

Man siehe hierüber Dr. Kleyer's Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln, und zwar den Abschnitt 5). im Anhang des 1. Teils.

Erkl. 166. Analog wie in der Erkl. 165 erhält man für

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

Erkl. 167. Die in $(1+2x+4x^2+8x^3+\ldots).(1+x+x^2+x^3+\ldots)$ angedeutete Multiplikation ausgeführt, gibt:

$$\begin{array}{rrrrl} 1+2x & +4x^2 & +8x^3 & +\ldots. \\ +\;x & +2x^2 & +4x^3 & +\ldots. \\ & +\;x^2 & +2x^3 & +\ldots. \\ & & +\;x^3 & +\ldots. \\ \hline 1+3x & +7x^2 & +15x^3 & +\ldots. \end{array}$$

Auflösung. Um eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu erhalten, zerlege man den gegebenen Quotienten in das Produkt zweier solchen Quotienten, welche sich auf die leicht möglichste Art in Reihen verwandeln lassen. Dann entwickle man diese Quotienten in Reihen und bilde deren Produkt, womit die fragliche Reihe gefunden ist.

Man erhält:

$$\frac{x}{(1-2x)(1-x)}=x\cdot\frac{1}{1-2x}\cdot\frac{1}{1-x}$$

oder nach den Erkl. 165 und 166:

$$\frac{x}{(1-2x)(1-x)}=x\cdot(1+2x+4x^2+8x^3+\ldots)\cdot(1+x+x^2+\ldots)$$

Führt man die Multiplikation rechts aus und ordnet das erhaltene Produkt nach Potenzen von x so erhält man für die gesuchte Reihe:

$$\frac{x}{(1-2x)(1-x)}=x+3x^2+7x^3+15x^4+\ldots$$

(siehe Erkl. 167).

Aus den 1. Gliedern dieser Reihe lässt sich schon das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder erkennen. Jedes Glied enthält nämlich die Potenz von x, deren Exponenten gleich der Stellenzahl des betr. Gliedes in der Reihe ist; das n^{te}, das allgemeine Glied, enthält also x^n. Ferner enthält jedes Glied noch eine Zahl als Faktor, welche um 1 kleiner ist als diejenige Potenz der Zahl 2, deren Exponent ebenfalls gleich der Stellenzahl des betr. Gliedes in der Reihe ist.

Das n^{te}, das allgemeine Glied jener Reihe ist somit: $(2^n-1)\,x^n$

Das 12. Glied ist hiernach:

$$(2^{12}-1)\,x^{12} \quad \text{oder} = 4095\,x^{12}$$

Aufgabe 370. Man soll den Quotienten $\frac{3}{2-5x+2x^2}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln und das allgemeine Glied, sowie das 9. Glied dieser Reihe bestimmen.

Erkl. 167a. Analog wie in der Erkl. 165 kann man

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots \text{ setzen,}$$

denn:

$$1 \;\Big|\; \underline{2-x}$$

$$\underline{\begin{array}{l} +1-\frac{1}{2}x \\ -\quad + \end{array}} \;\Big|\; \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}x \\ \underline{\begin{array}{l}\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2 \\ -\quad + \end{array}} \\ \frac{1}{4}x^2 \\ \underline{\begin{array}{l}\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3 \\ -\quad + \end{array}} \\ \text{u. s. f.} \end{array}$$

Erkl. 168. Analog wie in der Erkl. 166 kann man:

$$\frac{1}{1-2x} = 1+2x+4x^2+8x^3+\ldots.$$

setzen.

Erkl. 169. Die in

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots.\right)\left(1+2x+4x^2+8x^3+\ldots.\right)$$

angedeutete Multiplikation ausgeführt, gibt:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots. \\ \quad + x + \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3+\ldots. \\ \qquad + 2x^2 + x^3 + \ldots. \\ \qquad\qquad + 4x^3+\ldots. \\ \hline \frac{1}{2}+\frac{5}{4}x+\frac{21}{8}x^2+\frac{85}{16}x^3+\ldots. \end{array}$$

Erkl. 170. Man kann auch direkt die in dem Quotienten $\frac{3}{2-5x+2x^2}$ angedeutete Partialdivision ausführen, wonach man dieselbe Reihe, wie die in nebenstehender Auflösung entwickelte, erhält.

Auflösung. Den gegebenen Quotienten, dessen Divisor aus mehreren Gliedern besteht, kann man zunächst, wie folgt in das Produkt zweier Quotienten zerlegen, deren Divisoren nur zweiteilig sind. (Siehe Erkl. 170.)

Man erhält zunächst:

$$\frac{3}{2-5x+2x^2} = \frac{3}{2-4x-x+2x^2} =$$

$$\frac{3}{2(1-2x)-x(1-2x)} = \frac{3}{(2-x)(1-2x)} =$$

$$3\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1-2x}$$

Dann erhält man nach den Erkl. 167a u. 168:

$$\frac{3}{2-5x+2x^2} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots\right)\cdot$$

$$(1+2x+4x^2+8x^3+\ldots)$$

Führt man die angedeutete Multiplikation aus, so ergibt sich nach der Erkl. 169 für die gesuchte Reihe

$$\frac{3}{2-5x+2x^2} = \frac{3}{2}+\frac{15}{4}x+\frac{63}{8}x^2+\frac{255}{16}x^3+\ldots$$

Zur Bestimmung des n^{ten}, des allgemeinen Gliedes, zerlege man sich die Faktoren von x, wie folgt:

$$\frac{3}{2-5x+2x^2} = \left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(2^2-\frac{1}{4}\right)x+$$

$$\left(2^3-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(2^4-\frac{1}{16}\right)x^3+\ldots$$

$$= \left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(2^2-\frac{1}{2^2}\right)x+\left(2^3-\frac{1}{2^3}\right)x^2+$$

$$\left(2^4-\frac{1}{2^4}\right)x^3+\ldots$$

und hieraus ergibt sich, dass das n^{te}, das allgemeine Glied der Reihe =

$$\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)x^{n-1} \text{ ist.}$$

Das gesuchte 9te Glied der Reihe ist somit:

$$\left(2^9-\frac{1}{2^9}\right)x^{9-1} = \left(512-\frac{1}{512}\right)x^8 =$$

$$\frac{57343}{512}x^8$$

Aufgabe 371. Man soll den Quotienten $\frac{x}{1-5x+6x^2}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln und das allgemeine Glied, sowie das 7. Glied dieser Reihe bestimmen.

Aufgabe 372. Man soll den Quotienten $\frac{1}{2-3x-x^2}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln und das allgemeine Glied, sowie das 11. Glied dieser Reihe bestimmen.

Aufgabe 373. Man soll den Quotienten $\frac{2}{(1-x)(2-x)(3-x)}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln und das allgemeine Glied, sowie das 7., 9. und 11. Glied dieser Reihe bestimmen.

V. Zusammenstellung der Formeln, welche in diesem Buche entwickelt wurden.

I. Formeln für die niederen arithmetischen Reihen.

t bedeutet das letzte (auch das allgemeine) Glied.
a bedeut. das Anfangsglied.
d „ die Differenz d. Glieder
s „ „ Summe „ „
n „ „ Anzahl „ „
der Reihe.

a). Hauptformeln:

1). $t = a + (n-1)d$ . . . . . ist entwickelt auf Seite 4

2). $s = \frac{n}{2}(a+t)$ . . . . „ „ „ „ 5

b). Von diesen abgeleitete Formeln:

3). $a = t-(n-1)d$ . . . . . . „ „ „ „ 7

4). $a = \frac{s}{n} - (n-1)\frac{d}{2}$ . . . . . „ „ „ „ 7

5). $a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}+t\right)^2 - 2ds}$ „ „ „ „ 8

6). $a = \frac{2s}{n} - t$ . . . . „ „ „ „ 8

---

7). $d = \frac{t-a}{n-1}$ . . . . „ „ „ „ 8

8). $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}$ . . . . „ „ „ „ 9

9). $d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-a-t}$ . . . . . . „ „ „ „ 9

10). $d = \frac{2(tn-s)}{n(n-1)}$ . . . . „ „ „ „ 10

---

11). $s = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ . . . „ „ „ „ 10

12). $s = \frac{t-a+d}{2d}(a+t)$ . . . . „ „ „ „ 10

13). $s = \frac{n}{2}(2t-(n-1)d)$ . . . . „ „ „ „ 10

---

14). $t = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}$ ist entwickelt auf Seite 11

15). $t = \frac{2s}{n} - a$ . . . . „ „ „ „ 11

16). $t = \frac{s}{n} + (n-1)\frac{d}{2}$ . . . . . „ „ „ „ 12

---

17). $n = \frac{t-a}{d} + 1$ . . . . „ „ „ „ 12

18). $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$ „ „ „ 13

19). $n = \frac{2s}{a+t}$ . . . . „ „ „ „ 13

20). $n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}$ „ „ „ 13

II. Formeln für die niederen geometrischen Reihen.

a). Hauptformeln:

21). $t = a \cdot q^{n-1}$ . . . . ist entwickelt auf Seite 18

22). $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ . . . . „ „ „ „ 19

23). $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ . . . . „ „ „ „ 19

24). $s = \frac{a}{1-q}$ . . . . „ „ „ „ 21

t bedeutet das letzte (auch das allgemeine) Glied.
a bedeutet das Anfangsglied.
q „ den Quotienten und
s „ die Summe d Glieder.
n „ „ Anzahl „ „
der Reihe.

. . . Diese Formel stellt die Summenformel einer fallenden unendlichen geometrischen Reihe dar, q, d. i. der Quotient der Reihe, muss hier ein echter Bruch sein.

b). Von diesen abgeleitete Formeln:

25). $a = \frac{t}{q^{n-1}}$ . . . . ist entwickelt auf Seite 23

26). $a = \frac{s \cdot (q-1)}{q^n - 1}$ . . . . „ „ „ „ 23

27). $a = qt - s(q-1)$ . . . . . . „ „ „ „ 23

---

28). $q = \sqrt[n-1]{t : a}$ . . . . „ „ „ „ 24

29). $q = \frac{s-a}{s-t}$ . . . . „ „ „ „ 25

---

30). $s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$ . . . . „ „ „ „ 26

31). $s = \frac{t(q^n - 1)}{(q-1)\,q^{n-1}}$ . . . . „ „ „ „ 27

---

32). $t = \frac{s(q-1) + a}{q}$ . . . . „ „ „ „ 27

33). $t = \frac{s \cdot (q-1) \cdot q^{n-1}}{q^n - 1}$ . . . . „ „ „ „ 28

---

34). $n = \frac{\log t - \log a}{\log q} + 1$ . . . . „ „ „ „ 28

35). $n = \frac{\log[s(q-1)+a] - \log a}{\log q}$ ist entwickelt auf Seite 29

36). $n = \frac{\log t - \log a}{\log(s-a) - \log(s-t)} + 1$ „ „ „ 29

37). $n = \frac{\log t - \log[qt - s(q-1)]}{\log q} + 1$ „ „ „ 30

III. Formeln für die zusammengesetzten Reihen:

38). $T = Aq^{n-1}\left[a + (n-1)d\right]$ . . ist entwickelt auf Seite 175

39). $S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + \frac{Ad}{q-1}\left[q^n(n-1) - q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1}\right]$ ist entwickelt auf Seite 175

40). $S = \frac{A}{q-1}\left[\left(a - \frac{dq}{q-1}\right)\left(q^n - 1\right) + ndq^n\right]$ „ „ 177 siehe Erkl. 188

T bedeutet das letzte (auch das allgemeine) Glied.
S bedeutet die Summe der Glieder.
A „ das Anfangsglied der geometrischen Reihe.
q bedeutet den Quotient der geometrischen Reihe.
a bedeutet das Anfangsglied der arithmetischen Reihe.
d bedeutet die Differenz der arithmetischen Reihe.
n bedeutet die Anzahl d. Glieder.

41). $S = \frac{A}{q-1}\left(\frac{dq}{q-1} - a\right)$ . . ist entwickelt auf Seite 179 siehe Erkl. 141 . . . Diese Formel stellt die Summenformel einer unendlichen zusammengesetzten Reihe dar, q muss hier ein **echter Bruch** sein.

IV. Formel für die harmonische Reihe:

42). $t = \frac{ab}{b + (n-1)(a-b)}$ . . ist entwickelt auf Seite 188

t bedeutet das letzte (auch das allgemeine Glied.
a bedeutet das 1. Glied,
b „ „ 2. „ und
n „ die Anzahl d. Glieder.

Berichtigungen.*)

1). Seite 21, in der Erkl. 5 soll es statt: $\left(\frac{1}{m}\right)^{\infty} = 0$, heissen: $\left(\frac{1}{n}\right)^{\infty} = 0$.

2). „ 50, in der 2. Reihe der Auflösung soll statt dem Buchstaben x der Buchstabe r stehen.

3). „ 50, in der 4. Reihe der Auflösung soll statt dem Buchstaben z der Buchstabe x stehen.

4). „ 58, in der 17. Reihe der Auflösung soll es statt 4,908 heissen: 4,905.

5). „ 64, in der Aufgabe 24 soll es statt $949\frac{1}{2}$ heissen: $2848\frac{1}{2}$ M.

6). „ 64, vor der Auflösung soll statt der Formel: $s = \frac{n}{2}(a + t)$ die Formel stehen:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ferner soll es daselbst statt: (siehe Formel 2, Seite 3) heissen: (siehe Formel 2, Seite 19).

*) Die hier erwähnten Druckfehler sind in den Büchern und Heften, welche aus Bogen eines späteren Neudruckes bestehen, berichtigt.



Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden..

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 113. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 114. } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. } Rentenrechnung als Fortsetz.
„ 116. } der Zinseszinsrechnung.
„ 117. }

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. }
„ 120. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 121. } (Forts. von Heft 118.)
„ 122. }

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 126. } einer Unbekannten.
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. }
„ 128. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 129. } (Forts. von Heft 124.)
„ 130. }

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen.

Heft 131. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 132. } einer Unbekannten.
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. }
„ 136. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 137. } (Forts. von Heft 133.)
„ 138. }

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in ...fässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht ...ischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (arc... ...isches Prinzip, schwimmende Körper). — Spez... ...ewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung ...s Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 140. } einer Unbekannten.
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 142. } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 144. } einer Unbekannten.
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 146. } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } Gleichungen des 1. Grades mit
„ 148. } einer Unbekannten. Schluss.
„ 149. } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } Körperberechnungen. 2. Buch.
„ 151. } Schluss. (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } Planimetrie: Konstruktionsauf-
„ 154. } gaben, gelöst durch geometr.
„ 155. } Analysis. (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } Planimetrie: Konstruktionsauf-
„ 157. } gaben, gelöst durch algebr.
} Analysis. (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } Differentialrechnung. (Forts.
„ 160. } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten implizieter Funktionen.

u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.